



UNIVERSITÉ DE LYON.
UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON I.

Institut Camille Jordan,
UFR de Mathématiques,
École doctorale InfoMath

COHOMOLOGIE DES PAVAGES ET LEURS DÉFORMATIONS.

Thèse présentée et soutenue publiquement le 11 décembre 2009

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Claude Bernard Lyon I

(spécialité mathématiques pures)

par

HOUSEM BOULMEZAOUD

Composition du jury

GILBERT HECTOR

Président, Examineur ;

JOHN HUNTON

Rapporteur ;

JOHANNES KELLENDONK

Directeur de thèse ;

HERVÉ OYONO-OYONO

Rapporteur ;

FRANZ GÄHLER

Examineur.

COHOMOLOGY OF TILING SPACES AND THEIR DEFORMATIONS

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

إِنَّ الْحَمْدَ لِلَّهِ نَحْمَدُهُ وَنَسْتَعِينُهُ وَنَسْتَغْفِرُهُ وَنَعُوذُ بِاللَّهِ مِنْ شُرُورِ أَنْفُسِنَا وَمِنْ سَيِّئَاتِ أَعْمَالِنَا،
مَنْ يَهْدِهِ اللَّهُ فَهُوَ الْمُهْتَدِ وَمَنْ يُضِلِلْ فَلَنْ تَجِدَ لَهُ وَلِيًّا مُرْشِدًا،
وَأَشْهَدُ أَنْ لَا إِلَهَ إِلَّا اللَّهُ، وَأَشْهَدُ أَنَّ مُحَمَّدًا عَبْدُهُ وَرَسُولُهُ.
الصَّلَاةُ وَالسَّلَامُ عَلَى رَسُولِ اللَّهِ وَعَلَى آلِهِ وَصَحْبِهِ وَمَنْ تَبِعَهُ بِإِحْسَانٍ إِلَى يَوْمِ الدِّينِ.

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements s'adressent tout naturellement à mon directeur de thèse Johannes Kellendonk. Sa grande disponibilité, ses encouragements, ses suggestions et son soutien m'ont énormément aidé durant mes années de thèse. Ce fut un grand plaisir de travailler avec lui.

Je remercie Hervé Oyono-oyono, non seulement pour avoir accepté de rapporter ma thèse et de faire partie de mon jury, mais aussi de m'avoir si bien accueilli à Clermont-Ferrand, ainsi que pour ses remarques et commentaires qui m'ont permis d'améliorer la qualité de mon travail.

Je remercie John Hunton pour avoir accepté de rapporter ma thèse et de participer à mon jury. Cela a été pour moi un plaisir et un honneur.

Je remercie aussi Franz Gähler pour avoir accepté d'assister à mon jury à la dernière minute et pour les discussions qu'on a eu au CIRM.

Je remercie aussi Gilbert Hector pour avoir pris le temps de m'écouter, j'ai beaucoup appris à son contact. Je le remercie également d'avoir accepté d'assister à mon jury. Ce fut un grand honneur.

Je remercie aussi Marcy Berge pour m'avoir accueilli à l'université du Montana, ainsi que pour toutes les démarches administratives contraignantes qu'il a effectué avec beaucoup d'enthousiasme.

Je n'oublie pas aussi de remercier Jean Bellissard, Jean-Marc Gambaudo, ce fut très enrichissant de les côtoyer. Merci aussi à mes collègues Antoine Julien et Jean Savinien, sans oublier mes collègues du bureau 111b, je pense notamment à Nader, Cédric, Azadeh, Valérie, Grégoire et Anisse sans omettre les nouveaux doctorants, je leur souhaite bon courage pour la suite.

Je tiens particulièrement à remercier la famille Fenghour Abdelhamid pour son aide et dévouement pendant ces années de thèse, je n'oublierai jamais leur soutien. Merci aussi à mon ami Noredine.

Je souhaite remercier mes cousins Tarek et Adel, ainsi que mon oncle Kamel pour tous les moments merveilleux que j'ai passé avec eux. Je n'oublie pas de remercier mes amis Noredine (encore une fois), Masseye Gaye, Mohamed Deffaf et Salim Abi-Ayad.

Enfin, je ne pourrais oublier de remercier mes parents, sans qui ce travail ne serait pas fait. Ils ont été d'un grand soutien, je dois avouer que les mots ne suffisent pas pour leur exprimer ma gratitude. Je remercie aussi mes frères : Yasser, Taleb et aussi Zamene, mais celle qui mérite le meilleur est ma petite soeur Nadj, ainsi que son époux Hamza. Bien évidemment, je ne pourrais terminer sans adresser mes chaleureux remerciements à celle qui est devenue ma moitié, je pense à mon épouse, qui m'a donné un si beau bébé.

RÉSUMÉ

Les pavages apériodiques ont suscité un grand intérêt des mathématiciens, depuis la découverte des quasicristaux dans les années 80. Ils interviennent dans plusieurs domaines des mathématiques. Notamment, dans la topologie algébrique par le biais de la cohomologie des pavages, dont il existe plusieurs versions. Dans ce travail de thèse, on s'intéresse principalement à deux thèmes. D'une part, les déformations de pavages, dans lequel on calcule le groupe mixte (dont les petites déformations sont dans un voisinage de l'identité). D'autre part, comme la cohomologie de Pimsner-Voiculescu est une nouvelle venue dans la théorie des pavages (définie par Bellissard et Savinien), on donnera un isomorphisme explicite entre la cohomologie des pavages et la cohomologie de Pimsner-Voiculescu. Puis, on énoncera clairement un autre isomorphisme entre la cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante et la cohomologie de Pimsner-Voiculescu.

Le premier chapitre est consacré aux rappels de quelques notions de base de la théorie des pavages, particulièrement, on rappelle la construction de l'espace des pavages. Le deuxième chapitre s'intéresse aux différentes versions de la cohomologie de l'espace des pavages qu'on trouve dans la littérature. Il est important de noter que ces différentes versions sont isomorphes, cependant, les isomorphismes en question sont assez abstraits. Dans le troisième chapitre, on s'intéresse aux déformations des pavages. Bien que, cette théorie soit introduite par Sadun, Williams et Clark, on considère que l'approche de Kellendonk, qui se situe dans le cadre des fonctions $\mathcal{P}$ -équivariantes. De ce point de vue, on ne considère que les déformations des ensembles de Delone, ainsi une déformation est donnée par une application lisse, telle que l'image d'un Delone est un Delone et sa différentielle soit fortement $\mathcal{P}$ -équivariante. L'objectif de ce chapitre est le calcul du groupe mixte, qui est une version réduite du premier groupe de cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante. En effet, le calcul de ce groupe se fait (à partir du premier groupe de cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante) en deux parties. La première partie est assez générale (car elle est reliée aux tores), le calcul est le même pour tous les pavages coupe-et-projection, à l'aide de l'application $*$ définie par Moody. La seconde partie fait l'objet d'une étude plus poussée, sur des exemples explicites (les pavages de Fibonacci, Penrose et l'Octogonal). Enfin, au dernier chapitre, on s'intéresse à la cohomologie de Pimsner-Voiculescu construite par Bellissard et Savinien pour les espaces de pavages. L'objectif, dans ce chapitre, est la construction d'isomorphismes explicites entre la cohomologie des pavages (comme limite directe de cohomologie cellulaire du complexe de Anderson-Putnam-Gähler), la cohomologie Pimsner-Voiculescu et la cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante.

Mots clefs :

Pavages apériodiques, pavages coupe-et-projection, cohomologie des pavages, fonctions $\mathcal{P}$ -équivariantes, déformations des pavages, groupe mixte.

ABSTRACT

The aperiodic tilings have attracted great interest mathematicians since the discovery of quasicrystals in 80 years. They work in several areas of mathematics. Notably, in algebraic topology through cohomology of the tilings, which there are several versions. In this thesis, we focus mainly two themes. On the one hand, deformations of tilings, in which calculating the mixed group (where the small deformations are in the neighborhood of the identity deformation). On the other hand, the cohomology of Pimsner-Voiculescu is a newcomer to the Theory of tilings (defined by Bellissard and Savinien), we give an explicit isomorphism between the cohomology of tilings and the cohomology of Pimsner-Voiculescu. Then we will state clearly another isomorphism between the strongly pattern equivariant cohomology and Pimsner-Voiculescu cohomology.

The first chapter is devoted to recall some basic notions of the theory of tilings, in particular, we recall the construction of the tilings. The second chapter looks at different versions of the cohomology of tiling spaces found in the literature. It is important to note that these versions are isomorphic, however, isomorphisms in question are quite abstract. In the third chapter, we are interested in deformations of tilings. Well that this theory was introduced by Sadun, Williams and Clark. We believe that the approach of Kellendonk which is built entirely in the framework of the pattern equivariant functions. From this point of view, we only consider the Delone sets deformations. A deformation is given by a smooth map, such that the image of a Delone set is a Delone set and its differential is strongly pattern equivariant. The purpose of this chapter is the calculation of the mixed group, which is a smaller version of the first group of strongly pattern equivariant cohomology. The calculation of group is distorted (from the first group of strongly pattern-equivariant cohomology) into two parts. The first part is fairly general (since it is linked to the torus), the calculation is the same for all cut-and-project tilings, to using the $*$ -map defined by Moody. The second part is the subject of further study on explicit examples (on Fibonacci, Penrose and Octagonal tilings). Finally, the last chapter, we interested in cohomology of the Pimsner-Voiculescu built by Bellissard and Savinien for tiling spaces. The objective in this chapter is the construction of explicit isomorphisms between the cohomologies of tilings (direct limit of the cellular cohomology of the Anderson-Putnam-Gähler complex), the Pimsner-Voiculescu cohomology and strongly pattern-equivariant cohomology.

Keywords :

Aperiodic tilings, cut and project tilings, cohomology of tilings, pattern equivariant functions, deformations of tilings, mixed group.

Table des matières

REMERCIEMENTS	2
RÉSUMÉ	4
ABSTRACT	7
TABLE DES MATIÈRES	10
TABLE DES FIGURES	10
INTRODUCTION	1
1 PRÉLIMINAIRES	5
1.1 Introduction	5
1.2 Rappel de quelques outils de base	5
1.2.1 Complexes simpliciaux	5
1.2.2 Limites inductives et projectives.	7
1.2.3 Topologie de Fréchet	9
1.3 Formalisme de la théorie des pavages.	10
1.3.1 Notions de base	11
1.3.2 Méthodes de construction des pavages	13
1.3.3 Quelques exemples importants	16
1.4 Espace des pavages.	18
1.4.1 Espace des pavages comme espace métrique.	19
1.4.2 Espace des pavages comme limite inverse.	20
2 COHOMOLOGIE DES PAVAGES.	23
2.1 Introduction	23
2.2 Rappel des cohomologies	23
2.2.1 Cohomologie de De Rham	23
2.2.2 Homologie et Cohomologie simpliciale	25
2.3 Fonctions $\mathcal{P}$ -équivariantes et Cohomologie	26
2.3.1 Cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivalente à coefficients réels.	27
2.3.2 Cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivalente à coefficients entiers.	28
2.4 L'approche de Bellissard-Savinien	30
2.4.1 La cohomologie de Pimsner-Voiculescu.	33

3	THÉORIE DES DÉFORMATIONS DES PAVAGES	35
3.1	Introduction	35
3.2	Les déformations selon Sadun-Clark-Williams	36
3.3	Les déformations selon Kellendonk	40
3.4	Groupe mixte pour des pavages coupe-et-projection	44
3.4.1	L'application $*$ et ses prolongements	45
3.4.2	Les générateurs de $\mathcal{R}_I$	50
3.4.3	Les générateurs de $\mathcal{R}_0$	58
4	LA COHOMOLOGIE PV DES PAVAGES	69
4.1	Introduction	69
4.2	Un isomorphisme explicite...	70
4.3	Cohomologie $\mathcal{P}$ -équivariante et la cohomologie PV	74
4.3.1	Fonctions fortement $\mathcal{P}$ -équivariantes sur la Δ -transversale	75
4.3.2	La cohomologie PV faible	76

Table des figures

1.1	Schéma coupe-et-projection et ensemble coupe-et-projection avec zone d'acceptance K	15
1.2	Substitution donnant le pavage de Penrose (les losanges sont subdivisés en triangle.	17
1.3	Pavage de Penrose par les losanges.	17
1.4	Substitution donnant le pavage Octogonal.	18
1.5	Pavage Octogonal par les triangles et les losanges.	18
1.6	Les deux premiers approximants du complexe de Gähler pour le pavage de Fibonacci.	22
2.1	La translation entre les punctures (en dimension croissante) d'une 2-face. .	34
3.1	Décoration des pavés de Penrose par les courbes.	60
3.2	Pavage de Penrose décoré par des courbes et bandes C_5 -invariantes.	61
3.3	Le générateur de $\mathcal{R}_0$ sur les losanges décorés.	61
3.4	Substitution donnant la décoration par les courbes C_5 -invariantes.	63
3.5	Substitution donnant le générateur de $\mathcal{R}_0$ du pavage octogonal.	65

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le contexte

Ce travail de thèse se situe dans le domaine de la théorie des pavages et la topologie algébrique. On s'intéresse notamment aux isomorphismes entre les différentes versions de cohomologies, ainsi qu'aux déformations de pavages.

Depuis la découverte des quasicristaux dans les années 80, les mathématiciens et physiciens ont porté un grand intérêt à ces matériaux. Comme le modèle mathématique des quasicristaux est les pavages apériodiques, leur étude a suscité beaucoup d'intérêt durant ces trois dernières décennies. Ces objets mathématiques sont présents dans divers domaines des mathématiques. L'étude de la topologie des pavages, i.e. des espaces de pavages, est toujours d'actualité, ainsi que la cohomologie des pavages, dont il existe plusieurs versions. À l'origine, la cohomologie a été définie comme la cohomologie du groupoïde du pavage [18] ou comme la cohomologie de Čech de l'espace des pavages [1]. Une version plus intuitive a été proposée plus tard en utilisant le concept de fonctions $\mathcal{P}$ -équivariantes [17, 20, 21]. Récemment, Bellissard et Savinien ont proposé une version utilisant le concept de complexe singulier (induit par la structure du pavage) afin de définir la cohomologie dite de Pimsner-Voiculescu [7]. D'un point de vue calcul, la cohomologie du groupoïde a eu plus de succès pour les pavages coupe-et-projection [13], tandis que la cohomologie de Čech est plus avantageuse pour les pavages de substitution [1]. De surcroît, la version originale de la cohomologie des pavages est isomorphe à la cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante. La fermeture topologique de celle-ci qu'on appelle cohomologie faiblement $\mathcal{P}$ -équivariante est isomorphe à la cohomologie tangentielle de l'espace des pavages (vu comme une lamination). La théorie des déformations fut introduite par Sadun, Williams et Clark [11, 29]. Ils ont interprété le premier groupe de cohomologie en

terme de déformations de pavages. En effet, de leur point de vue, une déformation est définie par un 1-cocycle, qui modifie la forme des pavés, ainsi, on obtient un nouveau pavage, mais sous certaines conditions. Kellendonk reformula la théorie des déformations dans un cadre différent, celui des fonctions $\mathcal{P}$ -équivariantes, ainsi une déformation est donnée par une fonction de $\mathbb{R}^d$ bi-Lipschitzienne dont la différentielle est fortement $\mathcal{P}$ -équivariante. En fait, les déformations altèrent les propriétés des systèmes dynamiques associés aux pavages. Les deux points de vue donnent une interprétation en cohomologie. Les déformations selon Sadun-Clark-Williams s'interprètent dans le premier groupe de cohomologie définie par le complexe de Anderson-Putnam-Gähler, tandis que les déformations, vues par Kellendonk, sont modélisées par le premier groupe de cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante. Le groupe mixte modélise les petites déformations modulo la conjugaison topologique.

Principaux résultats de la thèse

Dans cette thèse, on s'est intéressé à la cohomologie des pavages d'une part, et aux déformations des pavages d'autre part. Comme il existe plusieurs versions de cohomologies, le problème posé étant que les isomorphismes sont abstraits. L'idée du chapitre 4 est de donner des isomorphismes explicites entre différentes versions de cohomologies [6], à savoir la cohomologie PV [7], la cohomologie des pavages [28] (définie à partir du complexe de Anderson-Putnam-Gähler) et la cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante [17]. Au chapitre 3, on utilise l'interprétation de Kellendonk, pour avoir quelques résultats sur le groupe mixte [20], en fait, on donne un encadrement du rang de ce groupe pour les pavages coupe-et-projection. Le calcul de ce groupe se fera explicitement pour quelques exemples de pavages (Fibonacci, Penrose et Octogonal).

Plan

Chapitre 1

Pour commencer, nous rappelons quelques notions de base en topologie et en algèbre. Par la suite, nous mettons en place le formalisme de la théorie des pavages ainsi que les

notations que nous utilisons pour ce travail de thèse. En fin de chapitre, l'accent est mis sur les deux constructions de l'espace des pavages, i.e. comme limite inverse du complexe, dit de Anderson-Putnam-Gähler, et comme espace métrique.

Chapitre 2

Dans ce chapitre, nous rappelons les différentes cohomologies connues dans la littérature. Ensuite, nous décrivons, de manière très concise, les constructions de celles-ci appliquées aux pavages.

Chapitre 3

L'objet de ce chapitre est le calcul du groupe mixte, autrement dit, le groupe des déformations de pavages. Tout d'abord, il est nécessaire de rappeler les deux approches sur les déformations. Ensuite, nous nous intéressons au groupe mixte des pavages coupe-et-projection, en utilisant l'application $*$ et ses prolongements. Enfin, nous calculons le rang de ce groupe pour quelques exemples.

Chapitre 4

Dans ce dernier chapitre, tout d'abord, nous nous intéressons à la construction d'un isomorphisme explicite entre la cohomologie PV et la cohomologie des pavages. Ensuite, on étend cet isomorphisme jusqu'à la cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante. Enfin, on prolonge cet isomorphisme à un homomorphisme entre la cohomologie dite PV faible et la cohomologie faiblement $\mathcal{P}$ -équivariante.

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRES

1.1 Introduction

Dans ce chapitre d'introduction, on rappellera quelques notions de base d'algèbre et de topologie, qu'on utilisera dans ce travail. En outre, on mettra en place les définitions de base utilisées dans la théorie des pavages. En fin de chapitre, on rappellera les deux constructions de l'espace des pavages.

1.2 Rappel de quelques outils de base

1.2.1 Complexes simpliciaux

On rappelle dans ce premier paragraphe la définition des complexes simpliciaux. Pour plus de précision, on se réfère au livre de Hatcher [16], on peut voir aussi [30]. Cette notion permet de définir la cohomologie simpliciale, qu'on a utilisé dans ce travail de thèse.

DÉFINITION 1.2.1 (Simplexe). *Soient $p_0, p_1, \dots, p_n$ $n + 1$ points de $\mathbb{R}^N$, tels que les vecteurs $\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n}$ soient linéairement indépendants. On note par $\Delta^n = (p_0, \dots, p_n)$ la plus petite enveloppe convexe de ces points. On dit que Δ^n est un **n -simplexe**, et les points $p_0, \dots, p_n$ sont appelés **sommets** de Δ^n , le nombre n est la dimension du simplexe*

Δ^n .

Le d -simplexe engendré par un sous-ensemble $\{p_{n_0}, \dots, p_{n_d}\}$ de $\{p_0, \dots, p_n\}$ est appelé **face** de dimension d ou **d -face** du n -simplexe Δ^n .

L'ensemble des faces de dimension plus petite que n du n -simplexe Δ^n est appelé **bord** de Δ^n , qu'on note $\partial\Delta^n$. Le simplexe ouvert $\mathring{\Delta}^n$ de Δ^n est $\Delta^n - \partial\Delta^n$.

EXEMPLE 1.2.2. Le n -simplexe standard de $\mathbb{R}^N$ s'écrit :

$$\Delta^n = \{(p_0, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^n p_i = 1, x_i \geq 0 \text{ pour tous } i\}.$$

Sans trop rentrer dans les détails, on rappelle la définition d'un complexe simplicial.

DÉFINITION 1.2.3. On dit qu'un espace topologique X admet une structure de Δ -complexe ou complexe simplicial, s'il existe une collection d'applications $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in I}$, avec $I = \coprod_n I_n$ et $\alpha \in I_n$, telles que les applications $\sigma_\alpha : \Delta^n \longrightarrow X$ vérifient les propriétés suivantes :

- (1) la restriction $\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^n}$ ($\alpha \in I_n$) est injective, et chaque point de X est dans l'image de exactement une telle restriction $\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^n}$;
- (2) chaque restriction de l'application σ_α à une face de Δ^n est une des applications $\sigma_\beta : \Delta^n \longrightarrow X$, avec l'identification d'une face de Δ^n à Δ^{n-1} .

Un ensemble U de X est dit ouvert si et seulement si pour tout $\alpha \in I$, $\sigma_\alpha^{-1}(U)$ est un ouvert de Δ^n .

Orientations des simplexes.

Pour l'homologie ou la cohomologie simpliciale, il est nécessaire d'avoir une orientation sur les simplexes. Soit $\Delta^n = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ un n -simplexe, l'ordre des sommets dans l'écriture du n -simplexe définit une orientation du n -simplexe Δ^n . Si on effectue une permutation paire, on ne change pas le signe, en revanche on rajoute un signe " − " si on effectue une permutation impaire.

Complexes Polyédraux.

On a le même principe que pour les complexes simpliciaux, on remplace les simplexes par des polyèdres réguliers de $\mathbb{R}^N$. l'orientation est donnée par l'orientation de chaque type de k -cellule.

1.2.2 Limites inductives et projectives.

On rappelle ici la définition des limites inductives et projectives dans une catégorie donnée (groupes, anneaux, modules ou encore espaces topologiques...*etc*).

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, un objet p de $\mathcal{C}$ est appelé objet universel final s'il existe un unique morphisme de chaque objet de $\mathcal{C}$ vers p . Il est dit universel initial si, pour chaque objet de $\mathcal{C}$, il existe un unique morphisme de p vers cet objet.

Soit $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille d'objets de $\mathcal{C}$, supposons qu'il existe, pour tout $i \leq j$, un morphisme

$$\pi_j^i : C_i \longrightarrow C_j$$

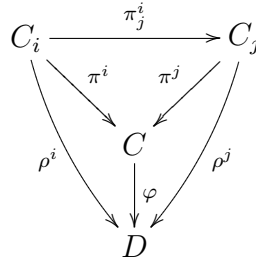
tel que, pour tout $i \leq j \leq k$, on ait

$$\pi_k^j \circ \pi_j^i = \pi_k^i \text{ et } \pi_i^i = \text{id}$$

Une telle famille est appelée système inductif. La limite inductive (ou limite directe) du système (π_j^i) est un objet universel initial dans une catégorie $\mathcal{A}$, dans laquelle les objets sont formés de couples $(C, (\pi^i))$, avec C un objet de $\mathcal{C}$ et (π^i) une famille de morphismes $\pi^i : C_i \longrightarrow C$, telle que pour tout $i \leq j$ on ait le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_i & \xrightarrow{\pi_j^i} & C_j \\ & \searrow \pi^i & \swarrow \pi_j \\ & C & \end{array}$$

Ainsi, si $(C, (\pi^i))$ est la limite inductive et $(D, (\rho^i))$ un objet quelconque de cette catégorie, il existe un unique morphisme $\varphi : C \longrightarrow D$ rendant commutatif le diagramme



On note cette limite $C = \varinjlim_i C_i$, en omettant les π_j^i . Pour les groupes, la limite inductive existe et est donnée par

$$\varinjlim_i C_i = \{(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} C_i \mid \pi_i^{i+1}(x_i) = x_{i+1}\} / N,$$

avec N le sous-groupe des éléments engendrés par $(\dots, 0, x, 0, \dots, 0, -\pi_j^i(x), 0, \dots)$, avec $x \in C_i$ et $\pi_j^i(x) \in C_j$.

Pour la définition de la limite projective (ou limite inverse), il suffit de renverser toutes les flèches. Soit $i \leq j$, on a le morphisme

$$\pi_i^j : C_j \longrightarrow C_i$$

tel que, pour tout $i \geq j \geq k$,

$$\pi_i^j \circ \pi_j^k = \pi_i^k \text{ et } \pi_i^i = \text{id}$$

Ainsi on obtient un système projectif, qui permet de définir la limite projective $(C, (\pi^i))$, noté $C = \varprojlim_i C_i$. Pour les espaces topologiques cette limite existe, si les applications π_i^j sont continues, et est donnée par

$$\varprojlim_i C_i = \{(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} C_i \mid \pi_{i+1}^i(x_{i+1}) = x_i\}.$$

La topologie de cette espace est la topologie la moins fine rendant les applications π_i continues. En fait, la topologie limite projective des topologies des C_i est la même que celle induite par la topologie de l'espace produit $\prod_{i \in \mathbb{N}} C_i$ (pour plus de précision voir [2]).

1.2.3 Topologie de Fréchet

Pour plus de précision sur la topologie de Fréchet, on se réfère au cours de [5]. On désigne par $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes.

DÉFINITION 1.2.4. *Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une application $s : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est appelée semi-norme si les propriétés suivantes sont vérifiées*

- $\forall x \in E, s(x) \geq 0$;
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, s(\lambda x) = |\lambda|s(x)$;
- $\forall x, y \in E, s(x + y) \leq s(x) + s(y)$.

Une norme est une semi-norme avec $s(x) = 0 \iff x = 0$. La topologie engendrée par une famille de semi-normes est définie de la même manière que celle définie par les normes. En effet, une boule ouverte centrée en x de rayon ε s'écrit $B_\varepsilon^s(x) = \{y \in E | s(x - y) < \varepsilon\}$.

DÉFINITION 1.2.5. *Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\{s_i\}_{i \in I}$ une famille de semi-normes sur E , avec I un ensemble dénombrable. Un sous-ensemble $U \subset E$ est dit ouvert, dans la topologie engendré par les semi-normes, si pour tout point $x \in U$, il existe $i_1, \dots, i_n \in I$ et $\varepsilon > 0$ tel que*

$$B_\varepsilon^{s_{i_1}}(x) \cap \dots \cap B_\varepsilon^{s_{i_n}}(x) \subset U.$$

Ainsi E devient un espace vectoriel topologique. Un tel espace vectoriel topologique est dit de Hausdorff si et seulement si

$$\forall i \in I, s_i(x) = 0 \iff x = 0.$$

E est dit de pré-Fréchet un espace vectoriel topologique de Hausdorff, si la topologie est donnée par une famille dénombrable de semi-normes.

REMARQUE 1.2.6. *Un espace pré-Fréchet est toujours métrisable.*

On rappelle la définition de l'adhérence d'un espace semi-normé, on dit qu'un élément f est dans l'adhérence d'un espace E si et seulement si,

$$\forall k \in I, \forall \epsilon > 0, \exists f_{k,\epsilon} \in E, \forall l \leq k, s_l(f_{k,\epsilon} - f) < \epsilon.$$

De même on rappelle la notion de convergence dans la topologie de Fréchet, on dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E dans $\mathbb{K}$, converge vers une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ si et seulement si :

$$\forall i \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} s_i(f_n - f) = 0. \quad (1.2.1)$$

DÉFINITION 1.2.7. *Un espace de Fréchet est un espace pré-Fréchet complet.*

Un exemple important d'espace de Fréchet est l'espace $C_b^\infty(U, \mathbb{R})$ des fonctions lisses bornées sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$. Cet espace est muni de la famille des semi-normes suivantes :

$$s_k(f) = \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |D^\alpha f(x)|, \quad (1.2.2)$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ et $D^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}} f$ la dérivée partielle d'ordre $|\alpha|$ de la fonction f . Pour cette famille de semi-normes, la convergence définit en 1.2.1 d'une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers une fonction f s'écrit comme suit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies s_k(f_n - f) < \epsilon.$$

L'espace $C_b^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est complet, ce qui découle de la complétude de l'espace des fonctions continues bornées $C_b^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et des arguments standards sur l'interversion de limite et dérivation pour les suites de fonctions qui convergent uniformément vers une limite ainsi que leurs dérivées qui convergent uniformément.

1.3 Formalisme de la théorie des pavages.

On s'intéresse dans cette section au formalisme de la théorie des pavages. En particulier, les pavages apériodiques.

1.3.1 Notions de base

DÉFINITION 1.3.1. • Un **pavé** de $\mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble non vide, compact de $\mathbb{R}^d$ égal à la fermeture de son intérieur. De plus, un pavé est homéomorphe à une boule fermée de $\mathbb{R}^d$.

- Un **pavage** $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^d$ est une famille dénombrable $\{p_i\}_{i \in I}$ de pavés tels que :

$$\bigcup_i p_i = \mathbb{R}^d,$$

pour tout $i \neq j$

$$p_i \cap p_j = \partial p_i \cap \partial p_j.$$

Dans ce travail, on suppose que les pavés soient des polyèdres de $\mathbb{R}^d$ qui se touchent face à face.

DÉFINITION 1.3.2. On appelle **Amas** un sous-ensemble fini de $\mathcal{P}$, $\mathcal{A} = \{p_1, \dots, p_k\}$, tel que $\bigcup_j p_j$ recouvre un ensemble connexe de $\mathbb{R}^d$. Les amas sont aussi appelés **cluster** ou **patch**.

DÉFINITION 1.3.3. Un pavage $\mathcal{P}$ est dit de **compléxité locale finie** (CLF) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, à translation près, il n'y a qu'un nombre fini d'amas à n pavés.

DÉFINITION 1.3.4. On dit qu'un pavage $\mathcal{P}$ est **apériodique**, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\mathcal{P} + x = \mathcal{P}$ implique que $x = 0$.

Les pavages sont vus comme des ensembles fermés de $\mathbb{R}^d$. En fait, un pavage $\mathcal{P}$ est un sous-ensemble fermé de parties données par le bord des pavés. Ainsi on pose la notation suivante.

NOTATION. $B_R[\mathcal{P} - x]$ signifie $B_R(0) \cap (\mathcal{P} - x)$

DÉFINITION 1.3.5. Soit $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \subset \mathbb{R}^d$ deux ensembles fermés. On dit que $\mathcal{P}'$ est **localement dérivable** de $\mathcal{P}$ si $\forall r > 0, \exists R > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^d :$

$$B_R[\mathcal{P} - x] = B_R[\mathcal{P} - y] \text{ implique } B_r[\mathcal{P}' - x] = B_r[\mathcal{P}' - y],$$

autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $B_r(0) \cap (\mathcal{P}' - x)$ est déterminé par $B_r(0) \cap (\mathcal{P} - x)$. On dit que $\mathcal{P}$ est **mutuellement localement dérivable (MLD)** de $\mathcal{P}'$, si $\mathcal{P}$ localement dérivable de $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}'$ localement dérivable de $\mathcal{P}$.

EXEMPLE 1.3.6. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, l'ensemble $\mathcal{P} - x$ est localement dérivable de $\mathcal{P}$.

DÉFINITION 1.3.7. Un **ensemble de Delone**¹ $\mathcal{D}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ tel que :

- $\mathcal{D}$ est uniformément discret, i.e. il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$\#(B_r(x) \cap \mathcal{D}) \geq 1,$$

- $\mathcal{D}$ est relativement dense, i.e. il existe $R > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$\#(B_R(x) \cap \mathcal{D}) \leq 1.$$

Soit $x \in \mathcal{D}$ et $R > 0$, un amas de $\mathcal{D}$, centré en x de taille R , est un sous ensemble de $\mathcal{D}$ de la forme $B_R(0) \cap (\mathcal{D} - x)$. On définit la notion de complexité locale finie pour un ensemble de Delone comme suit : Pour tout $R > 0$ le nombre d'ensemble $B_R(0) \cap (\mathcal{D} - x)$, pour $x \in \mathcal{D}$, est fini. Les notions d'apériodicité restent valables pour les ensembles de Delone, de même pour la dérivabilité locale.

Toutefois il reste une remarque importante à faire, il est important de savoir que tout pavage peut être associé à un ensemble de Delone et réciproquement. Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de Delone donné, on appelle **domaine de Voronoi** d'un point x de $\mathcal{D}$, l'ensemble

$$V_x = \{y \in \mathbb{R}^d / |x - y| \leq |z - y|, \forall z \in \mathcal{D} \setminus \{x\}\},$$

V_x est aussi appelé **pavé de Voronoi**. Ainsi l'union de tous les pavés de Voronoi donne un pavage de $\mathbb{R}^d$, noté $\mathcal{V}(\mathcal{D})$. Réciproquement, de tout pavage on obtient un ensemble de Delone. Pour se faire, on définit la notion de pointe (on utilisera le mot anglais "*puncture*") d'un pavé². Une **puncture** d'un pavé p dans $\mathcal{P}$ est un point choisit dans p , tel que si deux pavés coïncident, à translation près, leur puncture respective soit à la même position. Par exemple, on choisit le barycentre, un des sommets, ou un point quelconque de p tant que la condition précédemment citée soit vérifiée. On note $\mathcal{P}^{punc}$ l'ensemble de toutes les

¹On dit aussi Delaunay, en français.

²Notion très importante pour le chapitre 4.

punctures du pavage $\mathcal{P}$, et l'ensemble $\mathcal{P}^{punc}$ est un ensemble de Delone. Comme $\mathcal{V}(\mathcal{D})$ est muni d'une structure de complexe polyédral, on définit le dual ξ^* d'une d -cellule ξ de $\mathcal{V}(\mathcal{D})$ comme l'enveloppe convexe des points de $\mathcal{D}$ correspondants aux domaines de Voronoi contenant ξ comme une d -face (voir [13]). Dans ce sens, on définit le **pavage de Dirichlet** comme le dual du pavage de Voronoi, tel que les sommets des pavés de Dirichlet soient les points de l'ensemble de Delone $\mathcal{D}$.

1.3.2 Méthodes de construction des pavages

On s'intéresse principalement à deux méthodes de constructions des pavages, tout d'abord la méthode des substitutions, et ensuite celle de coupe-et-projection. Il existe tout de même une autre méthode de construction, celle des règles locales de recollement, qu'on n'utilisera pas dans ce manuscrit.

Substitution

La construction des pavages par une substitution est la plus visuelle, et la plus pratique. Afin de comprendre cette notion, on commencera par les substitutions pour les pavages de dimension 1, par la suite on définira les substitutions pour les dimensions supérieures.

Un **alphabet** $\mathcal{A}$ est un ensemble fini de **lettres** (pour l'exposé on signifie par lettre : une lettre ou un chiffre). Un **mot** de l'alphabet $\mathcal{A}$ est une suite fini ou infini de lettres. On note l'ensemble des mots de l'alphabet, $\mathcal{A}^*$. La **concatenation** de deux mots est l'opération de "coller" la dernière lettre du premier mot à la première lettre du second mot, cette opération est associative, ce qui muni l'ensemble $\mathcal{A}^*$ d'une structure de monoïde avec le mot vide comme élément neutre. Une **substitution** σ est une application de $\mathcal{A}$ dans l'ensemble $\mathcal{A}^*$, qui se prolonge à un morphisme sur le monoïde $\mathcal{A}^*$. La **matrice de substitution** ou **matrice d'incidence**, $M = (m_{ij})_{ij}$, est la matrice dont le coefficient m_{ij} est le nombre de fois que la i^{ieme} lettre apparaît dans $\sigma(j^{ieme} \text{ lettre})$. On dira qu'une matrice de substitution est **primitive** s'il existe un entier positif n tel que la matrice M^n a tous ses coefficients strictement positifs. On dira qu'une substitution σ est primitive si sa matrice d'incidence est primitive. Pour plus de précision sur la théorie des mots et leur dynamiques voir [4].

En dimension plus grande les lettres sont remplacées par des fermés de $\mathbb{R}^d$ d'intérieur non vide, par exemple, des polyèdres (comme des losanges, des carrés, cubes...etc). En fait, on regarde la géométrie des pavés. On se donne un réel $\lambda > 1$, qu'on appelle facteur d'inflation³, une substitution est une application telle que :

- Tout pavé lui est associé, par la substitution, le même pavé augmenté par l'homothétie de rapport λ ;
- On remplit le pavé augmenté par des pavés de taille normale, un tel pavé est appelé **superpavé d'ordre 1**.

La matrice de substitution $M = (m_{ij})_{ij}$ est définie comme pour les substitutions de dimension 1, le coefficient m_{ij} est donné par le nombre du i^{ieme} pavé dans le j^{ieme} superpavé d'ordre 1.

Méthode coupe-et-projection

L'autre méthode est celle de coupe-et-projection, cette méthode de construction est surtout utilisée dans le chapitre 3, afin de déterminer le rang du groupe des déformations d'un pavage.

DÉFINITION 1.3.8. Soient $\mathcal{E}$ un espace euclidien de dimension N , et $\Lambda \subset \mathcal{E}$ un réseau régulier (i.e. un sous-groupe discret cocompact) et soit E et $E^\perp$ deux sous espaces de $\mathcal{E}$ ($E^\perp$ est l'orthocomplément de E), $\pi : \mathcal{E} \longrightarrow E$ et $\pi^\perp : \mathcal{E} \longrightarrow E^\perp$ les projections orthogonales. On dit que le triplet $(\mathcal{E}, E, \Lambda)$ est un schéma de coupe-et-projection si

(i) $\pi|_\Lambda$ est injective ;

(ii) $\pi^\perp(\Lambda)$ est dense dans $E^\perp$.

Afin de définir les ensembles coupe-et-projection, il est nécessaire de définir l'application suivante, dite l'application $*$,

$$* : \pi(\Lambda) \longrightarrow \pi^\perp(\Lambda);$$

³The stretching factor.

telle que :

$*(x) = \pi^\perp(\pi|_\Lambda^{-1}(x))$ (ou encore $*(\pi(x)) = \pi^\perp(x)$). $*$ est un homomorphisme de groupe (car π et $\pi^\perp$ sont des morphismes).

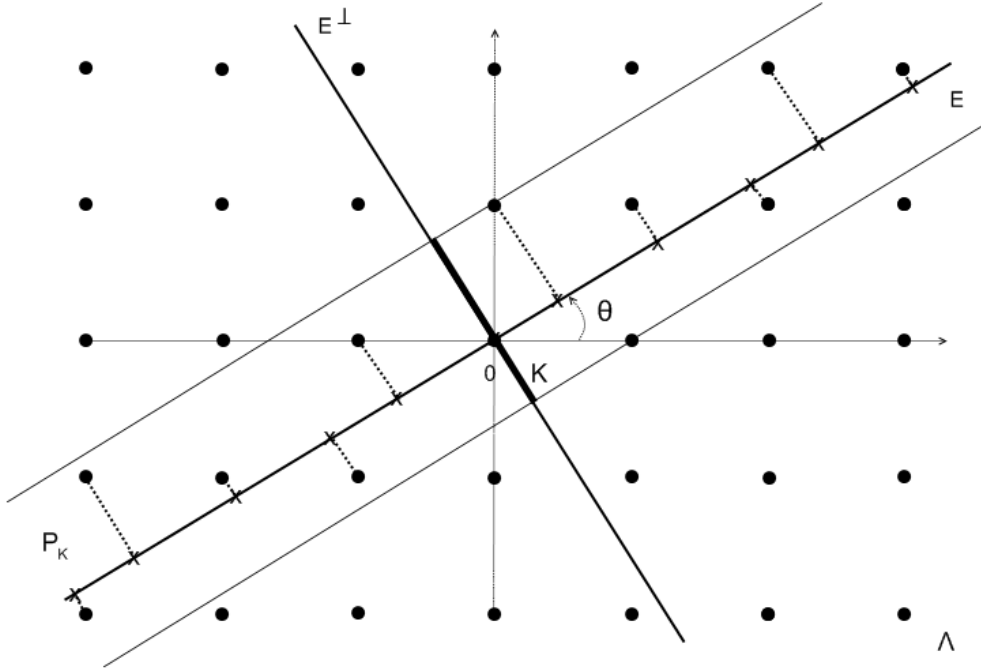


FIGURE 1.1 – Schéma coupe-et-projection et ensemble coupe-et-projection avec zone d'acceptance K .

DÉFINITION 1.3.9. Soit $K \subset E^\perp$ un compact qui est l'adhérence de son intérieur, on appelle ensemble de coupe-et-projection avec zone d'acceptance K l'ensemble :

$$\mathcal{P}_K = \{x \in \pi(\Lambda) \mid *(x) \in K\}.$$

Si $\partial K \cap \pi^\perp(\Lambda) = \emptyset$, alors $\mathcal{P}_K$ est dit non-singulier. Si K est la projection du N -cube unité de $\mathbb{R}^N$, on dit que K est une zone d'acceptance canonique. On dit aussi que $\mathcal{P}_K$ est un ensemble coupe-et-projection $N \longrightarrow d$ de domaine d'acceptance K .

NOTATION. On note γ la restriction de $*$ à $\mathcal{P}_K$, i.e. $\gamma = *|_{\mathcal{P}_K}$.

PROPOSITION 1.3.10. [23] L'ensemble $\mathcal{P}_K$ est un ensemble de Delone apériodique et de complexité locale finie.

Démonstration. voir la démonstration dans [23]. □

REMARQUE 1.3.11. Le choix du pavage associé à $\mathcal{P}_K$ peut se faire de plusieurs manières, soit les pavés sont des pavés de Voronoi, ou soit les points de $\mathcal{P}_K$ sont les sommet de pavés.

Dans le cas canonique, i.e. K canonique, les pavés sont les projections de d -faces des N -cubes de $\mathbb{R}^N$.

1.3.3 Quelques exemples importants

On rappelle dans ce paragraphe la construction de trois pavages, par les deux méthodes décrites précédemment. Tout d'abord, le pavage de la droite réelle dit de Fibonacci. Ensuite les pavages du plan, appelés pavage de Penrose (en losanges) et pavage octogonal.

Pavage de Fibonacci

Le pavage de Fibonacci fait partie de la classe des pavages donné à la fois par un schéma coupe-et-projection d'une part, et par une substitution d'autre part. Ce pavage de la droite réelle est donné par le schéma coupe-et-projection suivant $(\mathcal{E}, E, \mathbb{Z}^2)$, avec $E + E^\perp$ la décomposition du plan $\mathbb{R}^2$, tel que l'angle θ est irrationnel satisfait $\tan \theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, le *nombre d'or*. D'autre part, ce pavage est donné par une substitution σ définie sur un alphabet à deux lettres $\{a, b\}$ par

$$\sigma : \begin{cases} a & \mapsto aab \\ b & \mapsto ab \end{cases}$$

Cependant avec une telle substitution on obtient qu'un pavage d'une demi droite, pour paver toute la droite il faut partir d'un mot de deux lettres, en sachant qu'il existe des mots de deux lettre impossibles comme bb , les seuls possibles sont ab , aa et ba , et par la suite appliquer la substitution à droite et à gauche. Ainsi on obtient la suite

$$\dots abaababaabaabababaab \dots$$

pour paver la droite il suffit de prendre pour a un intervalle de longueur $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et pour b la longueur 1.

Pavage de Penrose

Le pavage de Penrose est aussi un pavage qu'on obtient par un schéma coupe-et-projection, donné par $(\mathcal{E}, E, \mathbb{Z}^5)$, avec $E = \mathbb{R}^2$ et dont l'orthocomplément est de dimension 3, pour plus de précision on se réfère à [23]. On obtient aussi ce pavage par une substitution, celle-ci est définie sur des losanges. Cependant, il n'y a pas que deux losanges, mais il faut

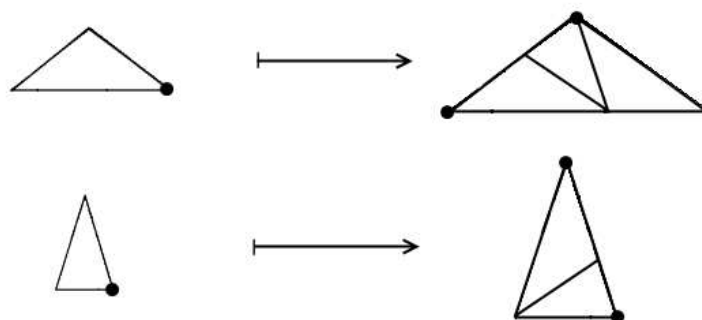


FIGURE 1.2 – Substitution donnant le pavage de Penrose (les losanges sont subdivisés en triangle).

compter vingt pour le premier et vingt autres pour le second (on compte tous les losanges avec leur orientation.)

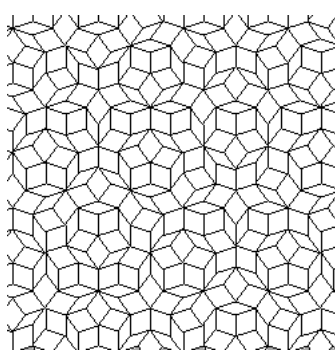


FIGURE 1.3 – Pavage de Penrose par les losanges.

REMARQUE 1.3.12. *Il est possible d'obtenir un pavage MLD à celui du pavage de Penrose par un schéma coupe-et-projection d'un réseau de rang 4, autrement dit, l'espace $\mathcal{E}$ est de dimension 4 avec les espaces E et $E^\perp$ de dimension 2 (pour plus de précision voir [9]).*

Pavage Octogonal

De même pour le pavage Octogonal [33], il est défini comme ensemble coupe-et-projection, donné par le schéma $(\mathcal{E}, E, \mathbb{Z}^4)$, avec E un plan de $\mathbb{R}^4$. La substitution est définie sur un triangle et un losange comme lettres de l'alphabet (voir [19] pour plus de précision).

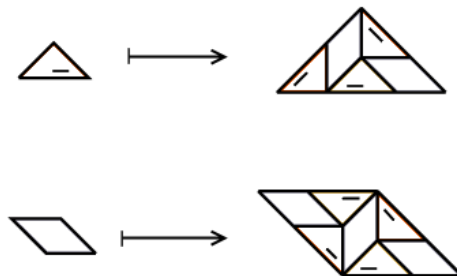


FIGURE 1.4 – Substitution donnant le pavage Octogonal.

De même que pour le pavage de Penrose, il faut compter seize triangles et quatre losanges de base pour obtenir tout le pavage du plan.

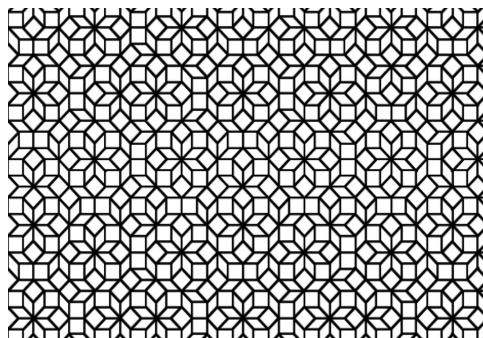


FIGURE 1.5 – Pavage Octogonal par les triangles et les losanges.

1.4 Espace des pavages.

L'idée est de construire un espace qui a pour éléments des pavages, il existe deux manières d'avoir un tel espace. D'une part, on définit une métrique sur les pavages, et donc l'espace des pavages est donné comme complétion de l'orbite (par l'action du groupe de translation de $\mathbb{R}^d$) d'un pavage donné. D'autre part, on définit cet espace comme limite inverse d'espaces topologiques, appelés complexe de Anderson-Putnam-Gähler. Dans les deux cas les constructions donnent le même espace topologique : **l'espace des pavages**.

1.4.1 Espace des pavages comme espace métrique.

On considère que des pavages de complexité locale finie. On note $B_r(x)$ la boule centrée en x de rayon r , de plus on note

$$B_r(\mathcal{P}) = (B_r(0) \cap \mathcal{P}) \cup \partial B_r(0),$$

le r -amas de $\mathcal{P}$ centré à l'origine.

Métrique des pavages

Étant donné deux pavages $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ dans $\mathbb{R}^d$ (à savoir que ces deux pavages sont sur le même $\mathbb{R}^d$). On dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont ε -proche si les deux pavages coïncident sur une boule centrée à l'origine de rayon $\frac{1}{\varepsilon}$, modulo les petites translations (de taille inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$). On écrit la métrique D :

$$D(\mathcal{P}, \mathcal{P}') = \inf_{R>0} \left\{ \frac{1}{R+1} \mid \exists x, y \in B_{\frac{1}{2R}}(0), B_R(\mathcal{P} - x) = B_R(\mathcal{P}' - y) \right\}.$$

L'enveloppe continue d'un pavage

Soit $\mathcal{P}$ un pavage de $\mathbb{R}^d$, on appelle orbite de $\mathcal{P}$ l'ensemble

$$orb(\mathcal{P}) = \{\mathcal{P} - x \mid x \in \mathbb{R}^d\}.$$

L'espace des pavages $\Omega_{\mathcal{P}}$, appelé aussi enveloppe continue de $\mathcal{P}$ est la complétion de l'orbite de $\mathcal{P}$ par D

$$\Omega_{\mathcal{P}} = \overline{orb(\mathcal{P})}^D$$

Les éléments de $\Omega_{\mathcal{P}}$ sont des pavages.

THÉORÈME 1.4.1 ([17]). *L'enveloppe continue d'un pavage $\mathcal{P}$ de complexité locale finie, est l'ensemble des pavages $\mathcal{P}'$, tel que à translation près, tout amas de $\mathcal{P}'$ apparaît dans $\mathcal{P}$, i.e.*

$$\Omega_{\mathcal{P}} = \{\mathcal{P}' \mid \forall R > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \exists y \in \mathbb{R}^d : B_R(\mathcal{P}' - x) = B_R(\mathcal{P} - y)\}.$$

$(\Omega_{\mathcal{P}}, \varphi)$ est un système dynamique topologique avec $\varphi(v, \mathcal{P}') = \mathcal{P}' - v$, comme action continue de $\mathbb{R}^d$ sur $\Omega_{\mathcal{P}}$. Il existe une transversale canonique.

DÉFINITION 1.4.2. *La transversale canonique du pavage $\mathcal{P}$ est l'ensemble*

$$\Xi_{\mathcal{P}} = \{\mathcal{P}' \in \Omega_{\mathcal{P}} \mid 0 \in \mathcal{P}'^{punc}\}.$$

On définit une métrique sur la transversale canonique induite par la métrique des pavages. Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux pavages de $\Xi_{\mathcal{P}}$, on définit la métrique sur $\Xi_{\mathcal{P}}$ par,

$$D_0(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \inf_{r>0} \left\{ \frac{1}{r+1} \mid B_r(\mathcal{P}_1) = B_r(\mathcal{P}_2) \right\},$$

cette métrique engendre la topologie sur la transversale canonique.

LEMME 1.4.3. *$\Xi_{\mathcal{P}}$ est la complétion de $\{\mathcal{P} - x \mid x \in \mathcal{P}^{pt}\}$ par rapport à D_0 .*

THÉORÈME 1.4.4 ([13]). *Pour un pavage de complexité locale finie $\mathcal{P}$, l'espace topologique $\Omega_{\mathcal{P}}$ est compact.*

THÉORÈME 1.4.5 ([13]). *Soit $\mathcal{P}$ un pavage de complexité locale finie, alors la transversale canonique est un ensemble compact et totalement discontinu.*

1.4.2 Espace des pavages comme limite inverse.

L'objet de ce paragraphe est la construction de l'espace des pavages comme une limite inverse d'espaces topologiques plus simples. Cette définition a été amorcée par Anderson et Putnam à la fin des années 90, pour les pavages donnés par une substitution[1]. D'autres s'y sont intéressés comme Sadun, Bellissard, Gambaudo [3] et bien d'autres. Cependant, c'est Franz Gähler qui donna une jolie construction [14], généralisée par la suite par Sadun [26].

Soit $\mathcal{P}$ un pavage de $\mathbb{R}^d$ de complexité locale finie, et t le pavé (ou l'amas) de $\mathcal{P}$ qui contient l'origine $0_{\mathbb{R}^d}$. On appelle première couronne du pavé t , l'ensemble des pavés contigus à t , on l'appelle aussi 1-voisinage ou encore la 1-décoration. La deuxième couronne de t est définie comme l'ensemble des pavés contigus à la première couronne et ainsi de

suite on obtient la k^{ieme} couronne. En revanche, Un k -voisinage (aussi appelée une k -décoration) de t est l'union de t et ses k premières couronnes. De manière équivalente, on appelle un pavé t décoré par son k -voisinage, un **pavé k -décoré**.

REMARQUE 1.4.6. *Il faut noter que la décoration ne change pas la taille du pavé, donc un pavé k -décoré est le même pavé avec les informations sur son k -voisinage.*

Soient t_1, t_2 deux pavés dans $\mathcal{P}$, on dit que t_1 est équivalent à t_2 , si, à translation près t_1 coïncide avec t_2 , cette classe d'équivalence est appelée **protopavé**. La condition de complexité locale finie implique qu'on a un nombre fini de protopavés. Un protopavé k -décoré est une classe de translation d'un pavé k -décoré. Encore une fois la complexité locale finie implique qu'on a un nombre fini de protopavés k -décorés. Afin d'obtenir la définition des complexes d'Anderson-Putnam-Gähler, on introduit une autre relation d'équivalence sur les faces de pavé.

Soient f_1 et f_2 deux faces de deux protopavés k -décorés $\tilde{t}_1$ et $\tilde{t}_2$. On dit que f_1 est équivalente à f_2 si on trouve deux représentants t_1 et t_2 (resp. des classes $\tilde{t}_1$ et $\tilde{t}_2$) dans $\mathcal{P}$ tels que les faces (de t_1 et t_2) correspondantes à f_1 et f_2 coïncident. Ainsi on définit les complexes Γ_k comme l'union des protopavés k -décorés modulo cette relation d'équivalence sur les faces. Ces ensembles Γ_k ont une structure de complexe simplicial. Le complexe $(\Gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est appelé le **complexe d'Anderson-Putnam-Gähler**. En fait, les approximants Γ_k sont des variétés branchées, on se réfère au travail de Bellissard-Benedetti-Gambaudo [3] pour plus d'informations.

EXEMPLE 1.4.7. *On considère le pavage de Fibonacci $\mathcal{P} = \dots baabaababaaba \dots$, pour un tel pavage il est assez facile de dessiner les deux premiers approximants du complexe de Gähler. Pour Γ_0 , les protopavés 0-décorés sont a et b , et pour Γ_1 , on a plus de protopavés, il y'en a quatre : $(a)a(b)$, $(b)a(a)$, $(b)a(b)$ et $(a)b(a)$, notons que la taille des pavés ne change pas c'est la décoration qui change (ce qui est entre parenthèse). Par identification des bords dans $\mathcal{P}$ on obtient donc les variétés branchées suivantes :*

On introduit la définition de l'espace des pavages donnée par Gähler dans un travail non publié, mais publié par la suite par Sadun[26]. Mais tout d'abord, et comme on l'a vu au premier paragraphe, il faut un système projectif.

DÉFINITION 1.4.8. *Soient les applications surjectives $\alpha_k : \Gamma_{k+1} \longrightarrow \Gamma_k^4$ qui à un point*

⁴The forgetful maps.

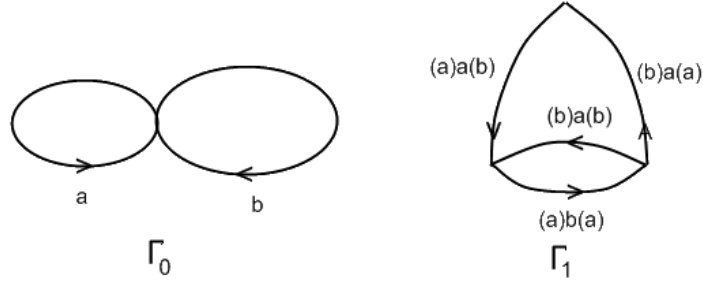


FIGURE 1.6 – Les deux premiers approximants du complexe de Gähler pour le pavage de Fibonacci.

dans un protopavé $k + 1$ -décoré associe le même point dans le protopavé k -décoré obtenu en oubliant dans la décoration la $k + 1^{\text{ème}}$ couronne. Ainsi la chaîne suivante

$$\cdots \xrightarrow{\alpha_{k+1}} \Gamma_{k+1} \xrightarrow{\alpha_k} \Gamma_k \cdots \xrightarrow{\alpha_0} \Gamma_0,$$

est un système projectif, et la limite inverse est l'espace des pavages $\Omega_{\mathcal{P}}$.

REMARQUE 1.4.9. Les ensembles Γ_k sont des variétés branchées compactes. Un point de Γ_k permet de dire comment placer les amas correspondants à un pavé k -décoré autour de l'origine de $\mathbb{R}^d$. Autrement dit, les surjections α_i induisent une application surjective $\rho_k : \Omega_{\mathcal{P}} \longrightarrow \Gamma_k$ définie comme suit : on considère le pavé de $\omega \in \Omega_{\mathcal{P}}$ avec sa k -décoration et contenant l'origine. Un point dans ce pavé, à translation près, correspond à un point dans un protopavé k -décoré, qu'on écrit $\rho_k(\omega)$.

Sadun démontra que les deux définitions de l'espace des pavages sont équivalentes (voir [27]).

THÉORÈME 1.4.10 ([27]). Si $\mathcal{P}$ est un pavage de complexité locale finie, alors l'espace des pavages $\Omega_{\mathcal{P}}$, comme fermeture de l'orbite de $\mathcal{P}$ (par l'action de translation, suivant la métrique sur les pavages) est limite inverse du complexe de Anderson-Putnam-Gähler.

DÉFINITION 1.4.11. On dit qu'un espace $\Omega_{\mathcal{P}}$ est mutuellement localement dérivable de l'espace $\Omega_{\mathcal{P}'}$, s'il existe une conjugaison topologique entre les deux espaces et que $\mathcal{P}$ est MLD de $\mathcal{P}'$.

Chapitre 2

COHOMOLOGIE DES PAVAGES.

2.1 Introduction

La cohomologie est un invariant d'un espace topologique, cet outil intervient dans de nombreux domaines des mathématiques. Bien que, la cohomologie sur $\mathbb{R}^d$ soit parfaitement connue des mathématiciens, ce n'est guère le cas pour d'autres espaces topologiques. Tout d'abord, on rappelle, de manière très concise, les définitions des différentes cohomologies qu'on a à étudier. Pour de plus amples informations on se réfère à [10], [12] ou encore [16]. Ensuite, on s'intéresse au sous-complexe des fonctions $\mathcal{P}$ -équivariantes et à la cohomologie qui en découle. Enfin, on donne les résultats principaux sur la cohomologie des pavages.

Dans ce chapitre, on ne considère que les pavages polyédraux apériodiques de complexité locale finie.

2.2 Rappel des cohomologies

2.2.1 Cohomologie de De Rham

Dans cette section, on rappelle la cohomologie de De Rham sur $\mathbb{R}^d$, cependant, on s'intéresse à un sous-complexe du complexe des k -formes différentielles lisses sur $\mathbb{R}^d$, à savoir le

complexe des fonctions fortement $\mathcal{P}$ -équivariantes. Soit $x_1, x_2, \dots, x_d$ le système de coordonnées standard de $\mathbb{R}^d$. On définit l'algèbre extérieure sur $\mathbb{R}$, qu'on note Ω^* , engendrée par les vecteurs $dx_1, dx_2, \dots, dx_d$, telle que :

$$\begin{cases} dx_i \wedge dx_i = 0 \\ dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i, i \neq j. \end{cases}$$

L'espace $\Omega^*\mathbb{R}^d$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, ayant pour base la famille :

$$1, \quad dx_i, \quad dx_i \wedge dx_j, \quad dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k, \quad \dots, \quad dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d.$$

$i < j \qquad i < j < k$

Soient $k \in \{0, \dots, d\}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^d$, une k -forme différentielle sur U est une application lisse $f : U \longrightarrow \Omega^k\mathbb{R}^d$. En utilisant la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et la base de $\Omega^k\mathbb{R}^d$, on écrit pour tout $x \in U$

$$f(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} f_{i_1, \dots, i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

avec les $f_{i_1, \dots, i_k}$ des fonctions lisses sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'algèbre $C^\infty(U, \Omega^*\mathbb{R}^d) = \bigoplus_{k=0}^d C^\infty(U, \Omega^k\mathbb{R}^d)$ est une algèbre graduée, avec $C^\infty(U, \Omega^*\mathbb{R}^d)$ l'espace des k -formes lisses sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'opérateur différentiel

$$d : C^\infty(U, \Omega^k\mathbb{R}^d) \longrightarrow C^\infty(U, \Omega^{k+1}\mathbb{R}^d)$$

est définit sur une k -forme différentielle $f(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} f_{i_1, \dots, i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, par

$$df = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} \sum_{i=1}^d \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x_i} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Par exemple, si $f \in C^\infty(U, \Omega^0\mathbb{R}^d)$, i.e. une fonction de U à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $df = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.

L'opérateur d est une antidérivation, vérifiant la relation $d \circ d = 0$. d est appelé opérateur de **différentiation extérieure**. Le complexe ainsi défini, $(\Omega^*\mathbb{R}^d, d)$, est appelé **complexe de De Rham**.

Les éléments du noyau de d sont appelés formes fermées, dont l'ensemble est noté $Z^*(\mathbb{R}^d)$. Les formes exactes sont les éléments de l'image de d , on note $B^*(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des formes exactes.

DÉFINITION 2.2.1. *La cohomologie de De Rham sur $\mathbb{R}^d$ est l'espace vectoriel*

$$H_{DR}^*(\mathbb{R}^d) = Z^*(\mathbb{R}^d)/B^*(\mathbb{R}^d).$$

LEMME 2.2.2 (Poincaré).

$$H_{DR}^*(\mathbb{R}^d) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{en dimension } 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.2.2 Homologie et Cohomologie simpliciale

Afin de mettre en place le vocabulaire ainsi que les notations, on rappelle dans ce paragraphe la définition de l'homologie et de la cohomologie d'un complexe simplicial.

Soient X un Δ -complexe et A un groupe abélien. On appelle une n -chaîne de X une combinaison linéaire finie de n -cellules de X . On note $C_n(X, A)$ le groupe de ces n -chaînes sur X . On appelle opérateur de bord les homomorphismes $\partial_n : C_n(X, A) \longrightarrow C_{n-1}(X, A)$ défini par : $\partial_n(e)$ est le bord de e , i.e. une combinaison linéaire formelle des $(n-1)$ -faces de e .

LEMME 2.2.3. *Pour tout n , on a $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$.*

Une n -chaîne α est appelée **n -cycle** si et seulement si $\partial_n \alpha = 0$, l'ensemble des n -cycles est le noyau de l'application ∂_n , qu'on note $Z_n(X, A) = \ker \partial_n$. Un **n -bord** est une n -chaîne α telle qu'il existe une $n+1$ -chaîne β vérifiant $\alpha = \partial_{n+1} \beta$, i.e. $\alpha \in \text{Im } \partial_{n+1}$. On note l'ensemble de ces bords, $B_n(X, A)$. On remarque bien que tout bord est un cycle, en revanche, la réciproque n'est pas toujours vraie. D'où la notion d'homologie, on appelle n -groupe d'homologie de X le quotient

$$H_n(X, A) = Z_n(X, A)/B_n(X, A).$$

D'une manière analogue, on définit la cohomologie de X . Le groupe des n -cochaînes

est le dual du groupe des n -chaînes, $C^n(X, A) = \text{hom}(C_n(X), A)$. On appelle cobord l'homomorphisme dual de ∂_n , noté $\partial^n : C^n(X, A) \longrightarrow C^{n+1}(X, A)$, tel que $\partial^n \circ \partial^{n-1} = 0$.

Un n -**cocycle** est une n -cochaîne dans $\ker \partial^n$, on note le groupe des n -cocycles, $Z^n(X, A)$. Un n -cobord est un élément de $\text{Im } \partial^{n-1}$, le groupe des n -**cobords** est noté $B^n(X, A)$. Bien évidemment un n -cobord est un n -cocycle. La réciproque n'est pas toujours vraie, on définit ainsi le n -groupe de cohomologie :

$$H^n(X, A) = Z^n(X, A) / B^n(X, A).$$

Si X est un espace contractible, alors la réciproque est vraie, c'est l'équivalent du **lemme de Poincaré** pour les formes différentielles.

Pour la suite, l'anneau A est soit l'anneau des entiers $\mathbb{Z}$ ou des réels $\mathbb{R}$. La structure de groupe des n -cochaînes sera remplacée par une structure de $\mathbb{Z}$ -module ou de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Cohomologie polyédrale

La cohomologie polyédrale est définie de manière analogue que la cohomologie simpliciale, il suffit de remplacer un complexe simplicial par un complexe polyédral, ainsi les notions de cobord et de cocycle sont analogues.

2.3 Fonctions $\mathcal{P}$ -équivariantes et Cohomologie

Dans la théorie des pavages, on a introduit la notion des fonctions $\mathcal{P}$ -équivariantes. Celle-ci permet de définir une cohomologie isomorphe à la cohomologie des pavages d'une part, et de traduire le langage des déformations des pavages dans le cadre des fonctions $\mathcal{P}$ -équivariante d'autre part.

DÉFINITION 2.3.1. Soit $\mathcal{P}$ un pavage (ou un Delone) de $\mathbb{R}^d$ de complexité locale finie, et soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$, on dit que f est fortement $\mathcal{P}$ -équivariante¹, s'il existe

¹Dû à l'anglais *Pattern equivariant functions*.

$R > 0$, tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$B_R(0) \cap (\mathcal{P} - x) = B_R(0) \cap (\mathcal{P} - y) \implies f(x) = f(y).$$

On appelle R le rang de f .

Notons qu'une fonction fortement $\mathcal{P}$ -équivariante sur un réseau régulier $\mathcal{P}$ est une fonction périodique. Comme le pavage est de complexité locale finie, si f est une fonction fortement $\mathcal{P}$ -équivariante alors la restriction de f à l'ensemble des sommets du pavage prend un nombre fini de valeurs. De plus, toutes les fonctions continues (lisses) fortement $\mathcal{P}$ -équivariantes à valeurs réelles sont bornées. Si $\mathcal{P}'$ est localement dérivable de $\mathcal{P}$, alors toute fonction fortement $\mathcal{P}'$ -équivariante est fortement $\mathcal{P}$ -équivariante.

DÉFINITION 2.3.2. *L'espace des fonctions faiblement $\mathcal{P}$ -équivariantes, noté $C_{w-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est l'adhérence de l'espace des fonctions lisses fortement $\mathcal{P}$ -équivariantes $C_{s-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ dans l'espace des fonctions lisses bornées, par rapport à la topologie de Fréchet (i.e. la topologie induite par la famille des semi-normes $\{s_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ qu'on a défini au chapitre 1). Autrement dit, si une fonction $f \in C_{w-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ alors*

$$\forall l \in \mathbb{N}, \forall \epsilon > 0, \exists f_{l,\epsilon} \in C_{s-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}), \forall k \leq l, s_k(f_{l,\epsilon} - f) < \epsilon.$$

2.3.1 Cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante à coefficients réels.

Comme toute k -forme ω s'écrit $\sum_I f_I dx_I$, on dira que ω est fortement $\mathcal{P}$ -équivariante si et seulement si les fonctions f_I sont fortement $\mathcal{P}$ -équivariantes. On note $C_{s-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega^k \mathbb{R}^d)$ l'espace des k -formes lisses fortement $\mathcal{P}$ -équivariantes. Comme $d(C_{s-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega^k \mathbb{R}^d)) \subset C_{s-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega^{k+1} \mathbb{R}^d)$ (avec d étant la différentielle de $\mathbb{R}^d$). Donc

$$C_{s-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega^0 \mathbb{R}^d) \xrightarrow{d} C_{s-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega^1 \mathbb{R}^d) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} C_{s-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega^d \mathbb{R}^d)$$

est un sous-complexe du complexe de De Rham.

DÉFINITION 2.3.3. *La cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante est la cohomologie du sous-complexe $(C_{s-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega^* \mathbb{R}^d), d)$, qu'on note $H_{s-\mathcal{P}}^*(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, autrement dit pour tout*

$k \in \{0, \dots, d\}$, la cohomologie s'écrit

$$H_{s-\mathcal{P}}^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) = (\ker d \cap C_{s-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega^k \mathbb{R}^d)) / (\text{Im } d \cap C_{s-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega^k \mathbb{R}^d)).$$

En utilisant la cohomologie dynamique des fonctions transversalement localement constantes (dont la définition n'est pas nécessaire pour ce travail de thèse, on se réfère donc à l'article [17]), Kellendonk et Putnam démontrèrent que la cohomologie de Čech de $\Omega_{\mathcal{P}}$ est isomorphe à la cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante [17].

THÉORÈME 2.3.4 ([17]). *La cohomologie de Čech de l'espace $\Omega_{\mathcal{P}}$ à coefficients réels, $\check{H}(\Omega_{\mathcal{P}}, \mathbb{R})$ est isomorphe à la cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante, $H_{s-\mathcal{P}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$.*

Les fonctions faiblement $\mathcal{P}$ -équivariantes sont des fonctions bornées. L'espace des k -formes lisses faiblement $\mathcal{P}$ -équivariantes est noté $C_{w-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega^k \mathbb{R}^d)$. Ainsi la suite

$$C_{w-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega^0 \mathbb{R}^d) \xrightarrow{d} C_{w-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega^1 \mathbb{R}^d) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} C_{w-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega^d \mathbb{R}^d)$$

est un sous-complexe du complexe de de Rham. On définit la cohomologie faiblement $\mathcal{P}$ -équivariante, notée $H_{w-\mathcal{P}}^*(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, par

$$H_{w-\mathcal{P}}^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) = (\ker d \cap C_{w-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega^k \mathbb{R}^d)) / (\text{Im } d \cap C_{w-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega^k \mathbb{R}^d)).$$

2.3.2 Cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante à coefficients entiers.

D'autre part, Sadun a démontré un résultat similaire, en utilisant la construction de l'espace des pavages $\Omega_{\mathcal{P}}$ comme limite inverse des complexes d'Anderson-Putnam-Gähler $(\Gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (voir [26, 28]). Tout d'abord, il a démontré que les formes fortement $\mathcal{P}$ -équivariantes sur $\mathbb{R}^d$ sont le pullback des formes sur les Γ_k .

Ainsi la cohomologie de Čech de $\Omega_{\mathcal{P}}$ à coefficients entiers est limite directe des cohomologies de Čech des complexes $(\Gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à coefficients entiers. Sadun démontra que la cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante est isomorphe à la limite directe de la cohomologie de De Rham des variétés branchées Γ_k . Soit $\pi_k : \mathbb{R}^d \longrightarrow \Gamma_k$ l'application induite par le

pavage $\mathcal{P}$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, l'élément $\pi_k(x)$ de Γ_k , décrit le voisinage à l'origine du pavage $\mathcal{P} - x$. On dit que x et y sont deux points $\mathcal{P}$ -équivalents de rayon r , si $B_r(0) \cap (\mathcal{P} - x) = B_r(0) \cap (\mathcal{P} - y)$. Si x et y sont $\mathcal{P}$ -équivalents de rayon r et s'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $r > k(L+1)$, alors $\pi_k(x) = \pi_k(y)$ (L étant le diamètre du plus grand pavé). De plus, si $\pi_k(x) = \pi_k(y)$ alors il existe un rayon r tel que x et y soient $\mathcal{P}$ -équivalents. Une fonction f est dite fortement $\mathcal{P}$ -équivariante sur $\mathbb{R}^d$ si et seulement si il existe k tel que $f(x) = f(y)$ quand $\pi_k(x) = \pi_k(y)$, donc il existe une fonction $\check{f}$ sur Γ_k telle que

$$\pi_k^*(\check{f}_k) = f,$$

notons aussi que, pour tout $l > k$, il existe des fonctions $\check{f}_l$ sur Γ_l tel que $\pi_k^*(\check{f}_l) = f$. D'où le théorème suivant

THÉORÈME 2.3.5 ([28]).

$$C_{s-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega^n \mathbb{R}^d) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \pi_k^*(\Omega^n \Gamma_k),$$

avec $\Omega^n \Gamma_k$ l'ensemble des n -formes différentielles lisses sur Γ_k .

Ensuite, Sadun démontra le théorème de De Rham pour les variétés branchées,

THÉORÈME 2.3.6 ([28]). *Si X est une variété branchée, alors la cohomologie de De Rham de X est isomorphe à la cohomologie de Čech de X à coefficients réels.*

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$ la cohomologie de Čech de Γ_k est isomorphe à cohomologie de De Rham de Γ_k .

Le pavage $\mathcal{P}$ confère à $\mathbb{R}^d$ une structure de complexe polyédral, où les sommets sont des 0-cellules, les arêtes sont des 1-cellules...etc. Alors les approximations Γ_k ont aussi une structure de complexe polyédral. On dit que deux cellules c_1 et c_2 sont $\mathcal{P}$ -équivalentes de rayon r s'il existe $x \in c_1$ et $y \in c_2$ $\mathcal{P}$ -équivalents de rayon r . On dit qu'une cochaîne α sur $\mathbb{R}^d$ est fortement $\mathcal{P}$ -équivariante s'il existe r tel que si c_1 et c_2 sont deux cellules $\mathcal{P}$ -équivalentes alors $\alpha(c_1) = \alpha(c_2)$. Ainsi la cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante à coefficients entiers est donnée par la suite

$$0 \longrightarrow C_{\mathcal{P}}^0(\mathbb{R}^d) \longrightarrow C_{\mathcal{P}}^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_{\mathcal{P}}^d(\mathbb{R}^d) \longrightarrow 0,$$

avec $C_{\mathcal{P}}^n(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des n -cochaînes fortement $\mathcal{P}$ -équivariantes sur $\mathbb{R}^d$. Finalement, on a

THÉORÈME 2.3.7 ([28]). *La cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante à coefficients entiers est isomorphe à la cohomologie de Čech de l'espace des pavages $\Omega_{\mathcal{P}}$ à coefficients entiers.*

2.4 L'approche de Bellissard-Savinien

On rappelle qu'on ne considère que les pavages polyédraux de complexité locale finie. Dans cette section, on décrit la construction de Bellissard-Savinien de la Δ -transversale, ainsi que la cohomologie associée, qu'on appelle la cohomologie de Pimsner-Voiculescu [7]. Bellissard et Savinien ne considèrent que les pavages simpliciaux. Comme les pavages sont polyédraux, on peut considérer la cohomologie polyédrale au lieu de la cohomologie simpliciale. En effet, la restriction aux pavages simpliciaux n'est topologiquement pas une restriction, puisque tout pavage de complexité locale finie est mutuellement localement dérivable à un pavage polyédral (par exemple, le pavage dual du pavage de Voronoi de l'ensemble de ses punctures). Ainsi de manière mutuellement localement dérivable, on peut subdiviser les polyèdres en simplexes. Les pavés d'un tel pavage de dimension d sont homéomorphes à un d -simplexe, avec la condition que ces pavés se rencontrent face à face. En outre, une face de dimension n est homéomorphe à un n -simplexe, c'est-à-dire homéomorphe à $\Delta^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \text{ pour tous } i\}$. Cela signifie que le pavage définit un complexe simplicial (ou Δ -complexe) de l'espace $X = \mathbb{R}^d$. On note $\mathcal{P}^n$ le n -squelette de ce complexe simplicial, dont $\mathcal{P}^d = X$ et $\mathcal{P}^n$ est l'union de toutes les faces de dimension inférieure ou égale à n .

De la construction des Γ_k , il en découle une structure de complexe simplicial sur celles-ci et les cartes α_k sont des applications simpliciales. Une n -chaîne sur Γ_k est une combinaison linéaire des n -cellules de Γ_k . On note l'ensemble de ces n -chaînes, $C_n(\Gamma_k, \mathbb{Z})$. L'ensemble des n -cochaînes est le $\mathbb{Z}$ -module dual de l'ensemble des n -chaînes, qu'on note $C^n(\Gamma_k, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(C_n(\Gamma_k, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$.

Bellissard et Savinien ont introduit la notion de pointe (ou puncture) pour les faces de dimension n . En effet, une puncture d'une n -face est un point de la n -face qu'on choisit de telle sorte que, la position de ce point soit la même pour des n -faces qui coïncident, à

translation près. Par conséquent, les variétés Γ_k sont naturellement pointées.

Comme conséquence de cette notion, on peut définir les transversales de dimension n . On note par $\mathcal{P}^{n,punc}$ l'ensemble des pointes (ou punctures) des cellules de dimension n du pavage $\mathcal{P}$.

DÉFINITION 2.4.1. [7] *La Δ -transversale de dimension n est*

$$\Xi_{\Delta}^n = \{\mathcal{P} - x | x \in \mathcal{P}^{n,punc}\}.$$

L'union de ces ensembles Ξ_{Δ}^n est appelée la Δ -transversale du pavage $\mathcal{P}$

$$\Xi_{\Delta} = \bigcup_{n=0}^d \Xi_{\Delta}^n.$$

Les ensembles Ξ_{Δ}^n sont des sous-ensembles totalement discontinus et compacts de $\Omega_{\mathcal{P}}$. Leur topologie est engendrée par les sous-ensembles ouverts-fermés (clopen), qu'on appelle **zones d'acceptance** pour les faces de Γ_k , données par la définition suivante

DÉFINITION 2.4.2. *La zone d'acceptance d'une n -cellule σ de Γ_k est le sous-ensemble $\Xi_{\Delta}(\sigma)$ de Ξ_{Δ}^n donné par*

$$\Xi_{\Delta}(\sigma) = \rho_k^{-1}(p_{\sigma})$$

avec p_{σ} la pointe (puncture) de σ . (Les surjections ρ_k sont définies dans la remarque 1.4.9, en fin du chapitre 1).

REMARQUE 2.4.3. *Rappelons qu'une d -cellule σ dans Γ_k correspond à (la classe de translation de) un pavé t_{σ} dans $\mathcal{P}$ décoré avec sa k^{eme} couronne. Dans la même idée, une n -cellule σ dans Γ_k correspond à une n -face d'un pavé dans $\mathcal{P}$ décoré avec sa k^{eme} couronne. Ainsi, $\Xi_{\Delta}(\sigma)$ peut être vu comme un sous-ensemble de pavages contenant un amas correspondant à une face k -décorée définie par σ , telle que sa pointe (puncture) soit en $0 \in \mathbb{R}^d$.*

On note la restriction de la distance D (défini au chapitre 1) à Ξ_{Δ} par D_{Δ} . La famille des boules ouvertes-fermées $\{\mathcal{B}_{D_{\Delta}}(\mathcal{P}, \varepsilon)\}_{\mathcal{P} \in \Xi_{\Delta}}$, de rayon ε et de centre $\mathcal{P}$, est une base de topologie de l'espace $(\Xi_{\Delta}, D_{\Delta})$. On note $\mathcal{B}_{D_{\Delta}}^n(\mathcal{P}, \varepsilon)$ la boule ouverte-fermée dans la Δ -transversale Ξ_{Δ}^n de dimension n , de rayon ε et de centre le pavage $\mathcal{P}$.

LEMME 2.4.4. [6] *La famille de zones d'acceptance $\{\Xi_\Delta(\sigma)\}_{\sigma \in \Gamma_k}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, est une base pour la topologie de l'espace métrique (Ξ_Δ, D_Δ) .*

Démonstration. On se fixe n dans $\{0 \dots d\}$, car la démonstration ne dépend pas de la dimension, on démontre le lemme pour l'espace métrique (Ξ_Δ^n, D_Δ) . Soient σ un n -simplexe de Γ_k et $\mathcal{T}$ un pavage dans $\Xi_\Delta(\sigma)$. On choisit un réel $R > 0$ tel que, pour tout $\mathcal{T}' \in \Xi_\Delta^n$, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ coïncident sur une boule de $\mathbb{R}^d$ de rayon R centrée à l'origine qui recouvre la face et son k -voisinage décrite par σ , i.e $D_\Delta(\mathcal{T}, \mathcal{T}') \leq \frac{1}{R+1}$ et $R > k$. Alors $\mathcal{T}'$ est un pavage de la zone d'acceptance $\Xi_\Delta(\sigma)$, i.e.

$$\mathcal{B}_{D_\Delta}^n(\mathcal{T}, \frac{1}{R+1}) \subset \Xi_\Delta(\sigma).$$

Réciproquement, soit $\mathcal{T} \in \Xi_\Delta^n$ et R un réel positif, l'origine est une puncture dans une n -face f de $\mathcal{T}$. On choisit k tel que la n -face f et son k -voisinage de $\mathcal{T}$ recouvre un patch de taille supérieure à R centré à l'origine. f et son k -voisinage définit un n -simplexe σ_f de Γ_k . En conséquence, si $\mathcal{T}'$ est dans $\Xi_\Delta(\sigma_f)$, alors $\mathcal{T}'$ coïncide avec $\mathcal{T}$ sur un patch de taille supérieure à R centré à l'origine. Donc $\mathcal{T}'$ est un élément de $\mathcal{B}_{D_\Delta}^n(\mathcal{T}, \frac{1}{R+1})$, i.e.

$$\mathcal{T}' \in \Xi_\Delta(\sigma_f) \subset \mathcal{B}_{D_\Delta}^n(\mathcal{T}, \frac{1}{R+1}).$$

□

NOTATION. Pour $n \in \{0, \dots, d\}$, on note $C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{Z})$ le $\mathbb{Z}$ -module des n -cochaînes sur la Δ -transversale de dimension n . Le $\mathbb{Z}$ -module $C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{Z})$ est aussi appelé Δ -complexe de degré n , celui-ci sera étudié au chapitre 4. De plus, on a $C(\Xi_\Delta, \mathbb{Z}) = \bigoplus_n C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{Z})$.

COROLLAIRE 2.4.5. *L'espace des fonctions à valeurs entières, sur l'ensemble totalement discontinu Ξ_Δ , est engendré par les fonctions indicatrices sur les zones d'acceptance.*

REMARQUE 2.4.6. *Il en découle que tout $\alpha \in C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$ est de la forme $\alpha = \sum_\sigma n_\sigma \mathbb{1}_{\Xi_\Delta(\sigma)}$, c'est une somme finie car α est une fonction continue sur le compact Ξ_Δ^n à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et $n_\sigma \in \mathbb{R}$. On remarque que si $\sigma \neq \sigma'$ alors $\Xi_\Delta(\sigma) \cap \Xi_\Delta(\sigma') = \emptyset$ (un pavage ne peut avoir deux cellules différentes à l'origine). Par conséquent, on a*

$$\|\alpha\|_\infty = \sup_\sigma \sup_{\mathcal{T} \in \Xi_\Delta^n} |n_\sigma \mathbb{1}_{\Xi_\Delta(\sigma)}(\mathcal{T})| = \sup_\sigma |n_\sigma|$$

2.4.1 La cohomologie de Pimsner-Voiculescu.

Soient $\mathcal{S}_k^n$ l'ensemble des n -simplexes sur Γ_k et $\mathcal{S}_k$ l'union disjointe des $\mathcal{S}_k^n$. $\mathcal{S}_k$ est un ensemble fini car $\mathcal{P}$ est de complexité locale finie. L'ensemble des n -chaînes simpliciales sur Γ_k est noté $C_n(\Gamma_k)$, c'est un groupe abélien libre avec base $\mathcal{S}_k^n$. Le $\mathbb{Z}$ -module des n -cochaînes sur Γ_k , noté $C^n(\Gamma_k, \mathbb{Z})$, est finiment engendré.

Soient $\sigma \in \mathcal{S}_k^n$ et $\tau \in \mathcal{S}_k^{n-1}$ une face de σ , i.e. $\tau \in \partial\sigma$. Ainsi σ est représentée par une n -face e_σ k -décorée d'un pavé dans $\mathcal{P}$, et τ est représentée par une $n-1$ -face $f_\tau \subset f_\sigma$ (des faces de e_σ). On définit le vecteur $x_{\sigma\tau}$ dans $\mathbb{R}^d$ par $x_{\sigma\tau} = p_e - p_f$ avec p_e et p_f les pointes (punctures) respectives de e et f . Il est important de noter que ce vecteur ne dépend pas de la décoration, donc

$$x_{\sigma\tau} = x_{\alpha_k(\sigma)\alpha_k(\tau)}.$$

Comme Γ_0 est une variété branchée plate (ou encore un espace euclidien branché) le vecteur $x_{\sigma\tau}$ est bien défini sur Γ_0 .

DÉFINITION 2.4.7. Soient $\sigma \in \mathcal{S}_k^n$ et $\tau \in \mathcal{S}_k^{n-1}$ une face de σ , i.e. $\tau \in \partial\sigma$. L'application linéaire $\theta_{\sigma\tau} : C(\Xi_\Delta^{n-1}, \mathbb{Z}) \rightarrow C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{Z})$ est définie par

$$\theta_{\sigma\tau} = \begin{cases} \mathbb{1}_{\Xi_\Delta(\sigma)} T^{x_{\sigma\tau}} \mathbb{1}_{\Xi_\Delta(\tau)} & \text{if } \tau \subset \partial\sigma, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec $\mathbb{1}_U$ la fonction indicatrice sur l'ensemble U et $T^{x_{\sigma\tau}}$ la translation par le vecteur $-x_{\sigma\tau}$, i.e. pour tout f dans $C(\Xi_\Delta^{n-1}, \mathbb{Z})$, on écrit $T^{x_{\sigma\tau}} f(\xi) = f(T^{-x_{\sigma\tau}} \xi)$.

REMARQUE 2.4.8. Si l'espace $C(\Xi_\Delta, \mathbb{Z})$ est remplacé par l'espace de Hilbert $L^2(\Xi_\Delta, \mathbb{C})$ (définie suivant une mesure invariante sur la Δ -transversale) alors, dans ce cas les applications $\theta_{\sigma\tau}$ sont des **isométries partielles**.

Le n -simplexe standard Δ^n est orienté. Les n -faces de $\mathcal{P}$ sont homéomorphes à Δ^n , on les muni de l'orientation induite par les homéomorphismes, sachant que les n -faces qui coïncident, à translation près (par conséquent, les images de Δ^n par le même homéomorphisme à translation près), ont la même orientation. Si $f \subset e$ alors on écrit o_{ef} l'orientation relative entre f et e . Plus précisément, o_{ef} est égale à 1 si l'orientation de f et de la face de e correspondante à f est la même, à -1 sinon. Cependant, il faut remarquer que si f n'est pas une face de e l'orientation o_{ef} est nulle. Finalement, on a $o_{\sigma\tau} = o_{ef}$ avec

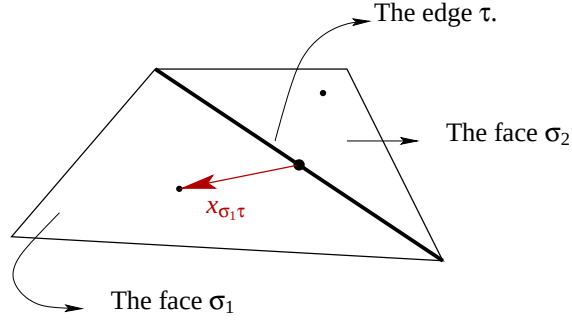


FIGURE 2.1 – La translation entre les punctures (en dimension croissante) d’une 2-face.

e et f comme ci-dessus.

DÉFINITION 2.4.9. *La cohomologie de Pimsner-Voiculescu ou simplement la cohomologie PV, de l’enveloppe continue de $\mathcal{P}$ est la cohomologie du complexe $\{C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{Z}), d_{PV}\}$ avec $d_{PV} : C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{Z}) \longrightarrow C(\Xi_\Delta^{n+1}, \mathbb{Z})$ la PV-différentielle, définit par*

$$d_{PV} = \sum_{\sigma \in S_0^{n+1}} \sum_{\tau \in S_0^k : \tau \subset \partial \sigma} o_{\sigma\tau} \theta_{\sigma\tau}$$

On démontre assez rapidement le lemme suivant,

LEMME 2.4.10. $d_{PV} \circ d_{PV} = 0$.

NOTATION. *Le groupe de la cohomologie PV de degré n à coefficients entiers est noté $H_{PV}^n(\Gamma_0, C(\Xi_\Delta, \mathbb{Z}))$.*

La cohomologie PV est isomorphe à la cohomologie de Čech de l’espace des pavages [7]. Le but dans le chapitre 4 est de donner une preuve directe de ce résultat à l’aide d’un isomorphisme explicite.

Chapitre 3

THÉORIE DES DÉFORMATIONS DES PAVAGES

3.1 Introduction

L'étude des déformations des pavages a été introduite par Sadun, Williams et Clark. Celles-ci permettent d'étudier certaines notions d'équivalence entre espaces de pavages. On suppose que tous les pavages en question sont polyédraux, c'est à dire que les pavés sont des polyèdres de $\mathbb{R}^d$. De plus, on suppose que les pavages sont de complexité locale finie. On note $(\Gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ le complexe de Anderson-Putnam-Gähler associé à $\mathcal{P}$ (défini au chapitre 1). L'objectif de cette étude est de classifier les déformations de l'espace des pavages.

Il existe deux points de vue sur les déformations, le premier est celui donné par Sadun-Clark-Williams dans leurs travaux([11] et [29]). Le second est celui de Kellendonk([21]), qui permet d'avoir une vision plus analytique de la théorie.

Dans les deux cas, les déformations induisent plusieurs notions d'équivalence entre les espaces de pavages. On a principalement trois notions,

- (1) homéomorphe ;
 - (2) mutuellement localement dérivable ; ou encore
-

(3) topologiquement conjugué.

Cependant, Kellendonk rajouta une nouvelle notion, celle de la conjugaison topologique pointée. À savoir, on dit que deux ensembles de Delone $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont conjugués pointés, s'il existe une conjugaison topologique entre les systèmes dynamiques $(\Omega_{\mathcal{P}}, \mathbb{R}^d)$ et $(\Omega_{\mathcal{P}'}, \mathbb{R}^d)$ telle que $\mathcal{P}$ est image de $\mathcal{P}'$ par cette conjugaison.

3.2 Les déformations selon Sadun-Clark-Williams

Dans cet exposé, on considère uniquement les pavages polyédraux de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$.

Afin de bien comprendre le point de vue de Sadun-Clark-Williams, on se place dans le plan $\mathbb{R}^2$. En effet, étant donné qu'on considère que les pavages polygonaux, la forme et la taille des polygones (à savoir les pavés) sont décrites par un n -uplet d'arêtes orientées. Une arête orientée est vue comme un vecteur dans $\mathbb{R}^2$. Il en suit que la somme de ces vecteurs (correspondant aux arêtes) est égale à zéro. Par exemple, la forme d'un triangle est donnée par un triplet de vecteurs du plan, telle que leur somme soit égale à zéro. De plus, si deux pavés p_1 et p_2 différents coïncidant sur une arête, à translation près, alors on a le même vecteur sur l'arête de p_1 et sur l'arête du translaté de p_2 . Cette identification est compatible avec la relation d'équivalence décrite dans la définition du Γ_0 dans le complexe de Anderson-Putnam-Gähler, c'est en fait la description de la forme du protopavé. Bien évidemment, il ne faut pas oublier que la somme des vecteurs sur les arêtes doit être nulle.

En résumé, la forme d'un protopavé est décrite par un 1-cocycle f_0 de Γ_0 à valeur dans $\mathbb{R}^2$, vérifiant la relation

$$df_0(\omega) = f_0(d_S\omega) = 0, \quad (3.2.1)$$

avec ω une 2-cellule dans Γ_0 (en fait, $d_S\omega$ correspond au bord de ω , qui est une combinaison linéaire formelle des 1-faces, i.e. vecteurs sur les arêtes).

D'une manière plus générale, on peut considérer la forme d'un protopavé décoré par ses k -couronnes. Ce qui donne une 1-cochaîne fermée sur Γ_k à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ (vérifiant la relation précédente 3.2.1).

DÉFINITION 3.2.1. Soit un pavage $\mathcal{P}$, on appelle fonction-forme¹ de $\mathcal{P}$ une 1-cochaine fermée $f_0 : \Gamma_k \longrightarrow \mathbb{R}^d$ telle que

$$df_0(\omega) = f_0(d_S \omega) = 0,$$

pour toute 2-cellule ω dans Γ_k .

Définition des déformations : Ces 1-cocycles (ou fonctions-forme) jouent aussi un autre rôle celui de produire un nouveau pavage (à translation près) du pavage initial en changeant la forme des protopavés. En effet, soient $\mathcal{P}$ un pavage, e une 1-cellule de Γ_k (correspondant à une arête dans un protopavé k -décoré dans le pavage $\mathcal{P}$). L'image de e par un 1-cocycle f , notée $f(e)$, définit un vecteur de $\mathbb{R}^d$ qui correspond à une arête orientée, à translation près, d'un nouveau protopavé. Ainsi, si on remplace e par un segment parallèle à $f(e)$, alors, à l'aide de la condition $df = 0$, on obtient le bord d'un nouveau protopavé. Or, il n'est pas nécessaire qu'un tel procédé permet de compléter le 1-squelette en entier du nouveau pavage. Cependant si c'est le cas, on décrit un nouveau pavage de $\mathbb{R}^d$ déduit de $\mathcal{P}$, à l'aide du 1-cocycle f (qu'on a construit pavé par pavé à partir de ceux de $\mathcal{P}$). Le pavage obtenu est appelé **déformation** de $\mathcal{P}$ (pour plus de précision on se réfère aux travaux de [11] [29] et [21, section 3.1]).

REMARQUE 3.2.2. Il faut noter qu'on obtient un nouveau pavage qu'à condition que les nouvelles arêtes diffèrent légèrement des arêtes originales, sinon le résultat n'est pas forcément un pavage. En réalité, on parle de **petites déformations**.

Une question naturelle se pose à propos des déformations, si $\mathcal{P}'$ est une déformation d'un pavage $\mathcal{P}$, existe-t-il un processus inverse ? Autrement dit, si on a un pavage $\mathcal{P}'$, peut-on obtenir le pavage $\mathcal{P}$ comme déformation de $\mathcal{P}'$? C'est le cas si les arêtes du pavage $\mathcal{P}'$ diffèrent légèrement des arêtes de $\mathcal{P}$. En fait, le processus d'inversion n'est pas valable si par exemple $\mathcal{P}'$ est une déformation périodique d'un pavage aperiodique. Par conséquent, on ne prend que les petites déformations. On appelle la 1-cochaine fermée associée à une telle déformation, la **fonction-forme admissible**.²

NOTATION. Si $\mathcal{P}'$ est une déformation d'un pavage $\mathcal{P}$ par une 1-cochaine admissible f , on note le nouvel espace de pavage par $(\Omega_{\mathcal{P}})_f$.

¹En Anglais *shape function*.

²En anglais *admissible shape function*.

THÉORÈME 3.2.3 ([29], Théorème 2.1). *Soit $f : \Gamma_0 \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une 1-cochaîne fermée admissible, alors $\Omega_{\mathcal{P}}$ est homéomorphe à $(\Omega_{\mathcal{P}})_f$.*

Ce théorème de Sadun-Williams résume le fait suivant : si on déforme légèrement le pavage $\mathcal{P}$ alors on obtient une déformation $\mathcal{P}'$, dont la forme des pavés est donnée par la fonction f , qui diffère très peu de la forme des pavés de $\mathcal{P}$. L'application qui à $\mathcal{P}$ associe $\mathcal{P}'$ induit un homéomorphisme entre les espaces $\Omega_{\mathcal{P}}$ et $\Omega_{\mathcal{P}'}$.

Il faut noter que si une déformation est donnée par un cobord d'une 0-cochaîne, alors les deux pavages sont mutuellement localement dérivables. D'où le résultat suivant, démontré par Sadun et Clark.

Sadun et Clark ont défini une application $\mathcal{I} : H^1(\Gamma_k, \mathbb{R}^d) \longrightarrow \check{H}^1(\Omega_{\mathcal{P}}, \mathbb{R}^d)$ telle que

$$\mathcal{I}(f) = \pi_k^*([f])$$

avec $\pi_k : \Omega_{\mathcal{P}} \longrightarrow \Gamma_k$ la projection de l'espace des pavages sur l'approximant Γ_k .

THÉORÈME 3.2.4 ([11]). *Soient f et g deux 1-cochaînes fermées admissibles. Si $\mathcal{I}(f) = \mathcal{I}(g)$, alors $(\Omega_{\mathcal{P}})_f$ est mutuellement localement dérivable avec $(\Omega_{\mathcal{P}})_g$ (dans le sens que les déformations de $\mathcal{P}$ par f et par g sont MLD).*

On déduit de ce théorème que les déformations d'un pavage $\mathcal{P}$ sont paramétrées par les 1-cochaînes fermées sur un approximant Γ_k . De plus, si deux 1-cochaînes fermées sont cohomologues, alors les déformations associées sont mutuellement localement dérivables. Ce fait s'étend aux espaces de pavages, à savoir que deux représentants dans la même classe de cohomologie induisent des espaces de pavages mutuellement localement dérivables. En conclusion, les déformations, modulo les classes MLD, sont modélisées par les éléments du premier groupe de cohomologie $\check{H}^1(\Omega_{\mathcal{P}}, \mathbb{R}^d)$.

On définit maintenant une autre classe d'équivalence sur les déformations, celle qui donne la conjugaison topologique des espaces de pavages. Ce sont les déformations dite **asymptotiquement négligeables**³.

Soit x, y deux points de $\mathcal{P}$, un couple (x, y) est appelé **réurrence** de taille r si pour tout r' , $B_{r'}(\mathcal{P} - x) = B_{r'}(\mathcal{P} - y)$, avec $r = \sup r'$.

³En anglais *asymptotically negligible*.

Un chemin suivant les arêtes de x à y correspond à un lacet dans Γ_0 , et donc à une 1-chaîne fermée dans $C_1(\Gamma_0)$. Deux chemins différents de x à y correspondent à la même classe d'homologie dans $H_1(\Gamma_0)$ (en fait ces deux chemins produisent une 2-chaîne fermée). La classe d'homologie d'une récurrence dans $H_1(\Gamma_0)$ est appelée classe de récurrence. De même, si on a une classe de récurrence de taille $(k+1)A$, A étant le diamètre du plus grand protopavé, celle-ci correspond à une 1-chaîne fermée dans $C_1(\Gamma_k)$.

Comme l'espace de pavages est minimal, toutes les classes de récurrence sont les mêmes pour tous les pavages dans l'espace.

On énonce maintenant la définition de la condition qui permet de dire qu'une déformation induit une conjugaison topologique.

DÉFINITION 3.2.5. *Soit η un élément de $H^1(\Gamma_k, \mathbb{R}^d)$, on dit que η est asymptotiquement négligeable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante R_ε , telle que pour toute récurrence $\rho \in H_1(\Gamma_k)$ de taille $R \geq R_\varepsilon$ on a*

$$|\eta(\rho)| < \varepsilon.$$

Une classe dans $\check{H}^1(\Omega_{\mathcal{P}}, \mathbb{R}^d)$ est asymptotiquement négligeable si son pullback est asymptotiquement négligeable dans $H^1(\Gamma_k, \mathbb{R}^d)$, pour un k donné.

Sadun et Clark ont énoncé le résultat suivant

THÉORÈME 3.2.6 ([11], Théorème 2.2). *Soit $f, g \in C^1(\Gamma_0, \mathbb{R}^d)$ deux fonctions-forme admissibles. Si $\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}(g)$ est asymptotiquement négligeable alors $(\Omega_{\mathcal{P}})_f$ et $(\Omega_{\mathcal{P}})_g$ sont topologiquement conjugués.*

Ceci signifie que, si on a deux éléments de $Z^1(\Gamma_k, \mathbb{R})$ tels que la différence de leur classe est asymptotiquement négligeable, alors les espaces sont topologiquement conjugués. Dans ce sens les 1-cochaînes fermées admissibles asymptotiquement négligeables modélisent la classe de conjugaison topologique entre les espaces de pavages. Notons que pour toute 1-cochaîne α dans $H^1(\Gamma_0, \mathbb{R})$, telle que pour un réel R donné et toute classe de récurrence ρ de taille plus grande que R , $\alpha(\rho) = 0$, donc l'image de α , par le pullback, dans $\check{H}^1(\Omega_{\mathcal{P}}, \mathbb{R})$ est nulle.

Déformations des pavages de substitution.

Dans leur travail [11], Sadun et Clark se sont intéressés aux pavages donnés par une substitution. Ils ont démontré que le premier groupe de cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante se décompose en sous-espaces caractéristiques (donnés par les valeurs propres de la substitution). À l'aide de cette décomposition, on sait quels sont les sous-espaces concernés par les déformations. On rappelle d'une manière très concise cette décomposition.

Une substitution σ induit en cohomologie l'application

$$\sigma^* : \check{H}^1(\Omega_{\mathcal{P}}, \mathbb{R}^d) \longrightarrow \check{H}^1(\Omega_{\mathcal{P}}, \mathbb{R}^d),$$

ainsi l'espace $\check{H}^1(\Omega_{\mathcal{P}}, \mathbb{R}^d)$ se décompose en sous-espaces caractéristiques de l'application σ^* .

THÉORÈME 3.2.7 ([11]). *L'espace des éléments asymptotiquement négligeable est égal à la somme des espaces caractéristiques associés aux valeurs propres de module strictement inférieur à 1.*

3.3 Les déformations selon Kellendonk

Kellendonk a réinterprété le point de vue précédent dans le cadre des 1-formes $\mathcal{P}$ -équivariantes (cf [21]). Dans ce cas, on se place dans un cadre analytique, i.e une déformation est donnée par une fonction φ de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On regarde les ensembles de Delone au lieu de regarder les pavages. En fait, l'application φ transforme des points, ce qui diffère du point de vue de Sadun-Clark. Puisque à partir d'un pavage, on obtient un ensemble de Delone et inversement, alors les deux approches sont équivalentes.

Dans la suite nous ferons un exposé concis des résultats démontrés par Kellendonk dans son travail [21]. De plus, on donnera une interprétation des déformations d'un point de vue cohomologique, autrement dit, on définira le groupe mixte.

Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de Delone de complexité locale finie, et $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une application qui vérifie l'hypothèse suivante :

Pour tout $r > 0$ il existe $r' > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$B(\varphi(x), r) \cap \varphi(\mathcal{D}) \subset \varphi(B(x, r') \cap \mathcal{D}). \quad (3.3.1)$$

Cette hypothèse est vérifiée si la fonction φ est bi-Lipschitzienne, i.e. s'il existe $\lambda > 1$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$\lambda^{-1}|x - y| \leq |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \lambda|x - y|. \quad (3.3.2)$$

Notons qu'une application bi-Lipschitzienne est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^d$. L'intérêt d'une telle hypothèse est que l'image d'un ensemble de Delone par une application bi-Lipschitzienne est un ensemble de Delone. Mais si on ne travaille pas avec un ensemble de Delone, par exemple un ensemble uniformément discret, il suffit que φ satisfasse l'hypothèse 3.3.1.

DÉFINITION 3.3.1. *Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de Delone de $\mathbb{R}^d$. On dit qu'un ensemble de Delone $\mathcal{D}'$ est une déformation de l'ensemble $\mathcal{D}$, s'il existe une application lisse $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ vérifiant l'hypothèse 3.3.1, telle que la différentielle $d\varphi$ soit fortement $\mathcal{D}$ -équivariante et $\varphi(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$.*

La définition suivante permet de donner le lien entre une 1-forme $\mathcal{D}$ -équivariante et une fonction entre les espaces de pavages (donnée dans l'article de Kellendonk [21]).

DÉFINITION 3.3.2. *Soit $\mathcal{P}$ un ensemble uniformément discret de complexité locale finie, soit $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$,*

- 1) *Soit $g \in GL(d, \mathbb{R})$, si φ est une fonction continue telle que $\varphi - g$ est faiblement $\mathcal{P}$ -équivariante, on définit l'application $\Phi_g : \text{orb}(\mathcal{P}) \longrightarrow \Omega_{\varphi(\mathcal{P})}$ par*

$$\Phi_g(\mathcal{P} - x) := \varphi(\mathcal{P}) - g(x).$$

- 2) *Si φ est une fonction différentiable telle que $d\varphi$ soit fortement $\mathcal{P}$ -équivariante, on définit l'application $\Phi_\varphi : \text{orb}(\mathcal{P}) \longrightarrow \Omega_{\varphi(\mathcal{P})}$ par*

$$\Phi_\varphi(\mathcal{P} - x) := \varphi(\mathcal{P}) - (\varphi(x) - \varphi(0)).$$

Le théorème suivant est un résultat important dans [21]. Il démontre qu'à toute déformation est associée une fonction entre les enveloppes continues.

THÉORÈME 3.3.3 ([21], Théorème 4.8). *Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de Delone de complexité locale finie. Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une application C^1 vérifiant l'hypothèse 3.3.1, telle que $d\varphi$ soit fortement $\mathcal{P}$ -équivariante. Alors Φ_φ est uniformément continue, et se prolonge sur l'espace $\Omega_{\mathcal{P}}$ à une application continue $\Phi_\varphi : \Omega_{\mathcal{P}} \longrightarrow \Omega_{\varphi(\mathcal{P})}$. En outre, si $\varphi(0) = 0$ alors $\Phi_\varphi(\Xi_{\mathcal{P}}) = \Xi_{\varphi(\mathcal{P})}$. Si φ est surjective alors Φ_φ est surjective.*

La réciproque est une question naturelle à se poser : existe-t-il, pour toute application continue entre deux espaces de pavages, une déformation associée ? Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux ensembles de Delone apériodiques de complexité locale finie, soit $\Phi : \Omega_{\mathcal{P}} \longrightarrow \Omega_{\mathcal{P}'}$ une application continue telle que $\Phi(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'$, qui preserve les orbites (i.e. qui envoie une orbite de $\mathcal{P} - x$ sur une orbite de $\mathcal{P}' - x'$). Ainsi la question précédente peut être reformuler comme suit : Existe-t-il une 1-forme fortement $\mathcal{P}$ -équivariante associée à l'application Φ ? Puisque $\mathcal{P}'$ est un ensemble de Delone apériodique, le point x' est déterminé uniquement à partir de x . Il existe une famille de fonctions $\varphi_{\mathcal{P}-y} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ telle que :

$$\Phi(\mathcal{P} - y - x) = \mathcal{P}' - y - \varphi_{\mathcal{P}-y}(x), \quad (3.3.3)$$

avec $\varphi_{\mathcal{P}-y}(0) = 0$.

Le théorème et corollaire suivants répondent à la question précédemment posée.

THÉORÈME 3.3.4 ([21], Théorème 4.10). *Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux ensembles de Delone apériodiques de complexité locale finie. Soit $\Phi : \Omega_{\mathcal{P}} \longrightarrow \Omega_{\mathcal{P}'}$ une application continue telle que $\Phi(\Xi_{\mathcal{P}}) \subset \Xi_{\mathcal{P}'}$ et $\Phi(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'$. Alors il existe une fonction lisse $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ ayant sa différentielle fortement $\mathcal{P}$ -équivariante telle que $\varphi|_{\mathcal{P}} = \varphi_{\mathcal{P}}$ (de l'égalité 3.3.3) et $\varphi(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}'$.*

COROLLAIRE 3.3.5 ([21], Corollaire 4.11). *Avec les mêmes hypothèses. Si Φ est un homéomorphisme tel que $\Phi(\Xi_{\mathcal{P}}) = \Xi_{\mathcal{P}'}$ et $\Phi(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'$. Alors l'application φ , définie dans le théorème, vérifie l'hypothèse 3.3.1 et induit la déformation $\mathcal{P}'$ de $\mathcal{P}$, i.e. $\mathcal{P}' = \varphi(\mathcal{P})$.*

Les deux théorèmes suivants permettent de donner une interprétation en cohomologie, et par la suite donner la définition du groupe de mixte.

THÉORÈME 3.3.6 ([21], Théorème 4.13). *Soient $\mathcal{P}$ un ensemble de Delone de complexité locale finie, $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction continue et $g \in GL(d, \mathbb{R})$. Si $\varphi - g$ est faiblement $\mathcal{P}$ -équivariante, alors Φ_g est une fonction uniformément continue telle que $\Phi_g(\omega - x) = \Phi_g(\omega) - g(x)$. En particulier, Φ_{id} s'étend à une semi conjugaison topologique entre les systèmes $(\Omega_{\mathcal{P}}, \mathbb{R}^d)$ et $(\Omega_{\varphi(\mathcal{P})}, \mathbb{R}^d)$, telle que $\Phi(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'$. Si $\varphi - g$ est fortement $\mathcal{P}$ -équivariante alors $\varphi(\mathcal{P})$ est un ensemble de Delone.*

THÉORÈME 3.3.7 ([21], Théorème 4.15). *Soit $\mathcal{P}'$ une déformation aperiodique et uniformément discrète d'un ensemble de Delone de complexité locale finie $\mathcal{P}$. Donc, en particulier, on a $\mathcal{P}' = \varphi(\mathcal{P})$, avec $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction lisse vérifiant l'hypothèse 3.3.1, dont la différentielle est fortement $\mathcal{P}$ -équivariante. De plus, si $\mathcal{P}'$ est semi conjugué pointé à $\mathcal{P}$ alors l'application Φ_{id} est uniformément continue. Si cette déformation est bornée (dans le sens où $\varphi - id$ est bornée) alors $\varphi - id$ est faiblement $\mathcal{P}$ -équivariante.*

Définition du groupe mixte

D'après la discussion précédente, on en déduit qu'on s'intéresse aux déformations proche de l'identité, autrement dit d'après l'approche de Kellendonk, on regarde les applications φ telles que $d\varphi$ est proche de did . À savoir les **petites déformations** (ou encore déformations admissibles d'après Sadun-Clark-Williams). En effet, d'après la définition 3.3.1, si $\mathcal{D}$ est un ensemble de Delone et $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une application lisse vérifiant l'hypothèse 3.3.1 dont la différentielle est fortement $\mathcal{P}$ -équivariante, alors $\varphi(\mathcal{D})$ est une déformation de $\mathcal{D}$. Cependant, il faut noter qu'une application φ telle que $d\varphi \in Z_{s-\mathcal{D}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ et $d\varphi$ suffisamment proche de did vérifie l'hypothèse 3.3.1, donc elle définit une déformation. Or, on remarque que les éléments de

$$N_{s-\mathcal{D}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) = \{d\eta \in B_{s-\mathcal{D}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) | \eta \text{ est constante sur } \mathcal{D}\}$$

représentent les déformations triviales, au sens que celles-ci représentent des translations de $\mathcal{D}$. Ainsi les éléments du groupe $Z_{s-\mathcal{D}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)/N_{s-\mathcal{D}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ avec l'hypothèse "proche de l'identité" définissent les petites déformations de l'ensemble de Delone $\mathcal{D}$.

De plus, Si $d\varphi - did$ est élément de $B_{s-\mathcal{D}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ alors $\varphi(\mathcal{D})$ est une déformation mutuellement localement dérivable de $\mathcal{D}$. Si cette différence est un élément de $B_{w-\mathcal{D}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ alors $\varphi(\mathcal{D})$ est topologiquement conjugué pointé de $\mathcal{D}$. En conclusion, les petites défor-

mations, modulo les déformations bornées (i.e. telles que $d\varphi - did$ borné) qui sont dans la même classe de conjugaison pointée, sont paramétrées par les éléments proches de did dans le **groupe mixte**

$$H_{m-\mathcal{P}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) = Z_{s-\mathcal{P}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) / B_{w-\mathcal{P}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \cap Z_{s-\mathcal{P}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d),$$

REMARQUE 3.3.8. (i) $H_{m-\mathcal{P}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ n'est pas un groupe de cohomologie, car il n'est pas défini par une suite de complexes différentiels. Autrement dit, le calcul de ce groupe ne se fait pas par des méthodes de topologie algébrique.

(ii) Dans le paragraphe suivant, on calcule le rang du groupe mixte, qui se fait à l'aide de l'application $*$ définie au chapitre 1 dans un schéma coupe-et-projection. En fait, les petites déformations sont paramétrées par un ouvert du groupe mixte, notre intérêt porte surtout sur la dimension de ce groupe, afin de savoir la dimension de cet ouvert.

3.4 Groupe mixte pour des pavages coupe-et-projection

Dans ce dernier paragraphe, on s'intéresse au calcul du groupe de mixte. Ce calcul se base sur deux outils, le premier groupe de cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante $H_{s-\mathcal{P}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et l'application $*$.

Comme $B_{s-\mathcal{P}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \subset B_{w-\mathcal{P}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, alors cette inclusion induit une application quotient $q : H_{s-\mathcal{P}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \longrightarrow H_{m-\mathcal{P}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Cette application q et l'application $*$ permettent de décomposer le groupe $H_{s-\mathcal{P}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ en deux sous-espaces, i.e.

$$H_{s-\mathcal{P}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) = \mathcal{R}_I \oplus \mathcal{R}_0.$$

Tout d'abord, on démontre que l'application $*$ admet un prolongement lisse faiblement $\mathcal{P}$ -équivariant et de différentielle fortement $\mathcal{P}$ -équivariante. Ensuite, à l'aide de l'application $*$ (ou plutôt du prolongement), on détermine quels générateurs de $\mathcal{R}_I$ sont faiblement cohomologues (au sens que la différence de deux générateurs est un élément de $B_{w-\mathcal{P}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap Z_{s-\mathcal{P}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$), c'est à dire, on détermine $q(\mathcal{R}_I)$. Enfin, on déterminera,

sur quelques exemples, quels générateurs de $\mathcal{R}_0$, qui ne sont pas éléments de $q(\mathcal{R}_I)$, sont faiblement cohomologues.

Dans la suite de ce chapitre, on se place dans un cadre de schéma coupe-et-projection (défini au chapitre 1), dont on rappelle les données.

3.4.1 L'application $*$ et ses prolongements

Soit $\mathcal{E}$ l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$, on considère la décomposition en deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux E et $E^\perp$ (respectivement de dimension d et $d^\perp$). On note π et $\pi^\perp$ les projections orthogonales respectivement sur E et $E^\perp$. Soit Λ un réseau régulier de $\mathcal{E}$. On considère le schéma coupe-et-projection $(\mathcal{E}, E, \Lambda)$ et l'ensemble coupe-et-projection $\mathcal{P}_K$, ayant comme zone d'acceptance un compact K de $E^\perp$ (qui est la fermeture de son intérieur), définit par

$$\mathcal{P}_K = \{\pi(\lambda) | \lambda \in \Lambda, \pi^\perp(\lambda) \in K\}.$$

On note $\gamma = *|_{\mathcal{P}_K} : \mathcal{P}_K \longrightarrow E^\perp$. L'objet de ce paragraphe est de démontrer que l'application γ admet un prolongement $\tilde{\gamma}$ faiblement $\mathcal{P}$ -équivariant, dont sa différentielle est fortement $\mathcal{P}$ -équivariante. Autrement dit, $\tilde{\gamma} : E \longrightarrow E^\perp$ satisfait

- (i) $\tilde{\gamma}|_{\mathcal{P}_K} = \gamma$;
- (ii) $\tilde{\gamma}$ est lisse et faiblement $\mathcal{P}$ -équivariante.
- (iii) $d\tilde{\gamma}$ est fortement $\mathcal{P}$ -équivariante

Ceci fera l'objet d'un théorème en fin de cette présente section. Mais, on commence d'abord par quelques rappels.

DÉFINITION 3.4.1. Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de Delone de $\mathbb{R}^d$. Soit $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^d$. Pour tout $h \in \mathcal{P} - \mathcal{P} = \{p - q \mid p, q \in \mathcal{P}\}$, on définit la fonction $\Delta_h f : \mathcal{P} \cap (\mathcal{P} - h) \longrightarrow \mathbb{R}^d$ par :

$$\Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x).$$

Δ_h est un opérateur qui associe une fonction sur $\mathcal{P}$, une fonction sur $\mathcal{P} \cap (\mathcal{P} - h)$.

LEMME 3.4.2. *Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de Delone de $\mathbb{R}^d$ de complexité locale finie, et $\psi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^d$. Supposons que pour tout $h \in \mathcal{P} - \mathcal{P}$, la fonction $\Delta_h \psi$ est fortement $\mathcal{P}$ -équivariante, alors il existe un prolongement lisse $\tilde{\psi} : E \longrightarrow \mathbb{R}^d$ de ψ tel que la différentielle $d\tilde{\psi}$ soit fortement $\mathcal{P}$ -équivariante.*

Démonstration. Voir dans la démonstration [21] □

COROLLAIRE 3.4.3. *Soit $\mathcal{P}_K$ un ensemble coupe-et-projection, alors il existe toujours un prolongement lisse $\tilde{\gamma} : E \longrightarrow E^\perp$ de l'application γ tel que la différentielle $d\tilde{\gamma}$ soit fortement $\mathcal{P}_K$ -équivariante.*

Démonstration. C'est un corollaire immédiat du lemme précédent. En effet, l'application $*$ est un homomorphisme de groupe, donc pour tout $x \in E$, et $h \in \mathcal{P}_K - \mathcal{P}_K$,

$$\Delta_h \gamma(x) = \gamma(h),$$

ainsi $\Delta_h \gamma$ est fortement $\mathcal{P}_K$ -équivariante. □

La proposition suivante généralise un résultat de [21, Proposition 2.7] :

PROPOSITION 3.4.4. *Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de Delone de complexité locale finie, et ω une k -forme fortement $\mathcal{P}$ -équivariante sur $\mathbb{R}^d$ ($k \geq 1$). D'après le lemme de Poincaré il existe une $(k-1)$ -forme f telle que $df = \omega$. Si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un ensemble de Delone $\mathcal{P}_\epsilon$ localement dérivable de $\mathcal{P}$ tel que ; pour tout $p, q \in \mathcal{P}_\epsilon$: $|f(p) - f(q)| < \epsilon$, alors $\omega \in B_{w-\mathcal{P}}^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.*

Dans [21, Proposition 2.7], Kellendonk supposait qu'il existe une partition de $\mathcal{P}$ par des sous-ensembles $\mathcal{P}_1 \dots \mathcal{P}_N$ tels que, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, chaque $\mathcal{P}_i$ est localement dérivable de $\mathcal{P}$. Dans la proposition ci-dessus, on suppose qu'il existe un seul ensemble, noté $\mathcal{P}_\epsilon$, localement dérivable de $\mathcal{P}$. Par conséquent, la démonstration suivante est une adaptation de la démonstration donnée par Kellendonk [21].

Démonstration. Pour simplifier la démonstration on pose $k = 1$. On suppose maintenant que pour $\delta > 0$ donné, on a un ensemble de Delone $\mathcal{P}_\delta$ localement dérivable de $\mathcal{P}$, tel que pour tout $p, q \in \mathcal{P}_\delta$, $|f(p) - f(q)| < \delta$. On suppose aussi que df est fortement $\mathcal{P}$ -équivariante, par conséquent, les dérivées partielles de f sont toutes bornées. Le but est

de démontrer que pour tout m et δ , il existe une fonction fortement $\mathcal{P}$ -équivariante $f_{m,\delta}$ tel que pour tout $l \leq m$ on a $s_l(f - f_{m,\delta}) < \delta$.

Il faut noter que si $\mathcal{P}_\delta$ est localement dérivable de $\mathcal{P}$ et f est une fonction fortement $\mathcal{P}_\delta$ -équivariante alors f est fortement $\mathcal{P}$ -équivariante.

On note $V_{\mathcal{P},p}$ le domaine de Voronoi de $\mathcal{P}$ d'un point $p \in \mathcal{P}$. Soit $p_0 \in \mathcal{P}_\delta$, pour tout $x \in \mathring{V}_{\mathcal{P}_\delta,p}$ et $p \in \mathcal{P}_\delta$, on définit la fonction $\sigma_\delta : \bigcup_{p \in \mathcal{P}_\delta} \mathring{V}_{\mathcal{P}_\delta,p} \longrightarrow \mathbb{R}$, par

$$\sigma_\delta(x) = \begin{cases} f(p) - f(p_0) & \text{s'il existe } p \in \mathcal{P}_\delta, x \in \mathring{V}_{\mathcal{P}_\delta,p} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par définition $f - \sigma_\delta$ est δ -près (pour la norme uniforme) de f et est fortement $\mathcal{P}$ -équivariante ($\mathcal{P}_\delta$ est localement dérivable de $\mathcal{P}$). Cependant $f - \sigma_\delta$ n'est pas forcément régulière (i.e. pour tout point x appartenant à l'intérieur d'un domaine de Voronoi, la fonction σ_δ est constante, donc elle est discontinue sur le bord des domaines en question).

Le but est de régulariser cette fonction. On procède de la même manière que dans le travail de Kellendonk [21]. Soit $\rho : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse à support inclus dans $B(0,1)$, et $\int \rho = 1$, on pose $\rho_\delta(x) = \delta^{-d} \rho(\frac{x}{\delta})$, on définit maintenant la fonction lisse fortement $\mathcal{P}$ -équivariante $f_{\delta_1, \delta_2} = \rho_{\delta_1} * (f - \sigma_{\delta_2})$. Montrons que c'est une approximation à δ -près, au sens de Fréchet (i.e. de la famille de semi-normes $(s_l)_{l \in \mathbb{N}}$ de 1.2.2 du chapitre 1), de f . Soit un entier $m < \infty$ fixé. Soit $\epsilon > 0$, on a pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$:

$$\| D^\alpha(\rho_{\delta_1} * \sigma_{\delta_2}) \|_\infty \leq \| \sigma_{\delta_2} \|_\infty \| D^\alpha(\rho_{\delta_1}) \|_1 \leq \delta_2 \delta_1^{-|\alpha|-d} \| D^\alpha \rho \|_1,$$

et donc on obtient pour tout $l \leq m$:

$$s_l(f - f_{\delta_1, \delta_2}) \leq s_l(f - \rho_{\delta_1} * f) + \sum_{|\alpha| \leq l} \delta_2 \delta_1^{-|\alpha|-d} \| D^\alpha \rho \|_1.$$

Or les dérivées partielles $D^\alpha f$ sont bornées pour tout α . Comme $f * \rho_{\delta_1}$ converge uniformément vers f sur tout compact, quand $\delta_1 \longrightarrow 0$ (voir [5, Théorème 3.4.6, chapitre 3]), on peut donc trouver δ_1 tel que, $s_m(f - \rho_{\delta_1} * f) < \frac{\epsilon}{2}$, par croissance des semi-normes, on déduit que pour tout $l \leq m$, $s_l(f - \rho_{\delta_1} * f) < \frac{\epsilon}{2}$. Finalement, on trouve un δ_2 tel que, $\sum_{|\alpha| \leq l} \delta_2 \delta_1^{-|\alpha|-d} \| D^\alpha \rho \|_1 < \frac{\epsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $l \leq m$

$$s_l(f - f_{\delta_1, \delta_2}) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}.$$

Par conséquent, f est une fonction faiblement $\mathcal{P}$ -équivariante.

□

Maintenant on démontre l'un des plus importants résultats de ce chapitre. En effet, le théorème suivant démontre l'existence d'un prolongement lisse de l'application γ (i.e. l'application $*$).

THÉORÈME 3.4.5. *Il existe une fonction lisse $\tilde{\gamma} : E \longrightarrow E^\perp$ telle que :*

$$(i) \quad \tilde{\gamma}|_{\mathcal{P}_K} = \gamma$$

$$(ii) \quad d\tilde{\gamma} \in B_{w-\mathcal{P}_K}^1(E, E^\perp) \cap Z_{s-\mathcal{P}_K}^1(E, E^\perp).$$

Avant de donner la démonstration du théorème, on démontre le lemme suivant :

LEMME 3.4.6. *Soit K le domaine d'acceptance d'un ensemble coupe-et-projection $\mathcal{P}_K$. Pour tout $x \in \pi^\perp(\Lambda)$, l'ensemble $\mathcal{P}_{K-x}$ est localement dérivable de $\mathcal{P}_K$. Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{P}_{(K-x) \cap K}$ est localement dérivable de $\mathcal{P}_K$.*

Démonstration. Soit $x \in \pi^\perp(\Lambda)$ alors on a $\mathcal{P}_{K-x} = \mathcal{P}_K - \tilde{x}$, avec $*(\tilde{x}) = x$. Comme $\tilde{x}$ est un vecteur fixe, l'ensemble $\mathcal{P}_K - \tilde{x}$ est localement dérivable de $\mathcal{P}_K$. Comme $\mathcal{P}_{K \cap (K-x)} = \mathcal{P}_K \cap \mathcal{P}_{K-x}$, on en déduit que l'ensemble $\mathcal{P}_{(K-x) \cap K}$ est localement dérivable de $\mathcal{P}_K$.

□

Démonstration du théorème 3.4.5. L'existence du prolongement $\tilde{\gamma}$ est donnée par le corollaire 3.4.3. De plus, on déduit aussi que $d\tilde{\gamma}$ est fortement $\mathcal{P}_K$ -équivariante. Reste à démontrer que $\tilde{\gamma}$ est une fonction faiblement $\mathcal{P}_K$ -équivariante. L'idée est d'appliquer la proposition 3.4.4. Autrement dit, il reste à trouver, pour tout $\epsilon > 0$, un ensemble de Delone $\mathcal{P}'$ localement dérivable de $\mathcal{P}_K$, tel que pour tout $p, q \in \mathcal{P}'$, $|\tilde{\gamma}(p) - \tilde{\gamma}(q)| < \epsilon$. Par conséquent, on souhaite construire un sous-ensemble compact K' , satisfaisant les hypothèses suivantes :

- (1) $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_{K'}$ est un ensemble de Delone localement dérivable de $\mathcal{P}_K$;
- (2) il existe $x \in E^\perp$ tel que $K' \subset B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$, i.e. le diamètre de K' est inférieur à ϵ .

(1) Soit $F \subset \pi^\perp(\Lambda) \cap K$ un ensemble fini, tel que $K \subset \cup_{u \in F} B_{\frac{\epsilon}{2}}(u)$, on pose

$$K' = \bigcap_{u \in F} K - u,$$

une telle intersection n'est pas vide, car pour tout $u \in \overset{\circ}{K}$, il existe ϵ_u tel que $B_{\epsilon_u}(u) \subset K$. Donc pour $\epsilon' = \min_u \{\epsilon_u\}$, on obtient $B_{\epsilon'}(0) \subset K'$. D'après le Lemme 3.4.6, l'ensemble $\mathcal{P}_{K'}$ est localement dérivable de $\mathcal{P}_K$. Il reste à démontrer que $\mathcal{P}_{K'}$ est un ensemble de Delone, autrement dit, $\mathcal{P}_{K'}$ est uniformément discret et relativement dense. En effet, $\mathcal{P}_{K'}$ est uniformément discret car il existe $u \in F$ tel que $\mathcal{P}_{K'} \subset \mathcal{P}_{K+u}$ (qui est un ensemble de Delone donc uniformément discret). $\mathcal{P}_{K'}$ est relativement dense car $\mathcal{P}_{\tilde{K}'} \subset \mathcal{P}_{K'}$, avec $\mathcal{P}_{\tilde{K}'}$ un ensemble coupe-et-projection et donc relativement dense. Par conséquent, $\mathcal{P}_{K'}$ est un ensemble de Delone localement dérivable de $\mathcal{P}_K$.

(2) Il reste à montrer que $\text{diam}(K') < \epsilon$, i.e. qu'il existe $x \in E^\perp$ tel que $K' \subset B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$. Soit I un ensemble fini, tel que $F = \{u_i | i \in I\}$. On pose $\tilde{K} = \cup_{i \in I} B_{\frac{\epsilon}{2}}(u_i)$ avec $\tilde{K}' = \cap_{j \in I} \tilde{K} - u_j$, on montre qu'il existe $x \in E^\perp$, tel que $\tilde{K}' \subset B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$. Or, on a par distributivité de l'intersection et de l'union

$$\tilde{K}' = \bigcap_{j \in I} \left(\bigcup_{i \in I} B_{\frac{\epsilon}{2}}(u_i) - u_j \right) = \bigcup_{\sigma \in \{\sigma: I \rightarrow I\}} \bigcap_{j \in I} B_{\frac{\epsilon}{2}}(u_{\sigma(j)}) - u_j.$$

On écrit donc

$$\tilde{K}' = \left(\bigcup_{\sigma \text{ bijective}} \bigcap_{j \in I} B_{\frac{\epsilon}{2}}(u_{\sigma(j)}) - u_j \right) \cup \left(\bigcup_{\sigma \text{ non bijective}} \bigcap_{j \in I} B_{\frac{\epsilon}{2}}(u_{\sigma(j)}) - u_j \right) \quad (3.4.1)$$

Soit $y \in \tilde{K}'$, i.e il existe une application $\sigma : I \rightarrow I$, tel que pour tout $j \in I$, $y \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(u_{\sigma(j)}) - u_j$. Donc il existe $b_j \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(0)$, tel que $y = b_j + u_{\sigma(j)} - u_j$.

Si σ est bijective, alors

$$\sum_{j \in I} y = \sum_{j \in I} b_j + u_{\sigma(j)} - u_j \implies \#(I)y = \sum_{j \in I} b_j,$$

or $\|b_j\| < \frac{\epsilon}{2}$, et donc $\|y\| < \frac{\epsilon}{2}$, i.e. $\tilde{K}' \subset B_{\frac{\epsilon}{2}}(0)$.

Si σ n'est pas bijective, pour tout $j \in I$, on a $B_{\frac{\epsilon}{2}}(u_{\sigma(j)}) - u_j \subset \bigcup_{k \in Im\sigma} B_{\frac{\epsilon}{2}}(u_k) - u_j$, donc

$$\bigcap_{j \in I} B_{\frac{\epsilon}{2}}(u_{\sigma(j)}) - u_j \subset \bigcap_{j \in I} \bigcup_{k \in Im\sigma} B_{\frac{\epsilon}{2}}(u_k) - u_j.$$

Comme $\#(Im\sigma) \leq \#(I)$, on obtient

$$\bigcap_{j \in I} B_{\frac{\epsilon}{2}}(u_{\sigma(j)}) - u_j \subset \bigcap_{j \in Im\sigma} \bigcup_{k \in Im\sigma} B_{\frac{\epsilon}{2}}(u_k) - u_j.$$

On pose $X_\sigma = \bigcap_{j \in Im\sigma} \bigcup_{k \in Im\sigma} B_{\frac{\epsilon}{2}}(u_k) - u_j$, par distributivité on a

$$X_\sigma = \bigcup_{\sigma' \in \{\sigma' : Im\sigma \longrightarrow Im\sigma\}} \bigcap_{j \in Im\sigma} B_{\frac{\epsilon}{2}}(u_{\sigma'(j)}) - u_j.$$

On réécrit X_σ comme à l'égalité 3.4.1 ci-dessus. On réitère le même procédé, pour conclure que $X_\sigma \subset B_{\frac{\epsilon}{2}}(0)$. Finalement on en déduit que $\tilde{K}' \subset B_{\frac{\epsilon}{2}}(0)$, donc $\text{diam}\tilde{K}' < \epsilon$. Comme $K \subset \tilde{K}$, on déduit rapidement que $K' \subset \tilde{K}'$, donc $\text{diam}K' < \epsilon$.

Comme pour tout $p, q \in \mathcal{P}_{K'}$, on a $\tilde{\gamma}(p), \tilde{\gamma}(q) \in K'$, on en déduit que $|\tilde{\gamma}(p) - \tilde{\gamma}(q)| < \epsilon$. Par conséquent, la proposition 3.4.4 permet de conclure que la fonction $\tilde{\gamma}$ est faiblement $\mathcal{P}_K$ -équivariante.

□

3.4.2 Les générateurs de $\mathcal{R}_I$.

On rappelle la définition du "pullback" d'une application différentiable $\psi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, qu'on écrit

$$\psi^* : \Omega^k \mathbb{R}^{n*} \longrightarrow \Omega^k \mathbb{R}^{m*},$$

qui est un homomorphisme d'anneau vérifiant les propriétés suivantes,

- pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, on a $\psi^*(f) = f \circ \psi$;
- pour toute fonction différentiable g sur $\mathbb{R}^N$, on a $\psi(dg) = d_E(g \circ \psi)$, avec d_E la différentielle sur E ;
- pour toutes fonctions f et g , on a $\psi^*(fdg) = f \circ \psi d_E(g \circ \psi)$.

Comme cet homomorphisme ψ^* commute avec les différentielles, on a un homomorphisme en cohomologie, qu'on note aussi ψ^*

$$\psi^* : H_{DR}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \longrightarrow H_{DR}(E, \mathbb{R}).$$

LEMME 3.4.7. *Soit $\psi : \mathcal{P}_K \longrightarrow \Lambda$, telle que pour tout h , $\Delta_h \psi$ est fortement $\mathcal{P}_K$ -équivariante, on note $\tilde{\psi} : E \longrightarrow \mathbb{R}^N$ un prolongement lisse de ψ . Soit $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Si df est une 1-forme Λ -périodique alors $\tilde{\psi}^*(df)$ est fortement $\mathcal{P}_K$ -équivariante.*

Comme le réseau Λ est régulier, on rappelle qu'une fonction fortement Λ -équivariante est une fonction Λ -périodique.

Démonstration. Soit df une 1-forme Λ -périodique, autrement dit, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont Λ -périodiques.

D'après le lemme 3.4.2, l'application ψ admet un prolongement lisse $\tilde{\psi}$ tel que la différentielle est fortement $\mathcal{P}_K$ -équivariante. Soit $p \in \mathcal{P}_K$, donc $\tilde{\psi}(p)$ est un point du réseau Λ . Or df est Λ -périodique, donc $\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \tilde{\psi}(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ i.e. une constante sur $\mathcal{P}_K$. On note r_{min} la distance minimale entre deux points de $\mathcal{P}_K$. Puisque $\mathcal{P}_K$ est de complexité locale finie, pour $\xi \in E$, les ensembles $B_{2r_{min}}(0) \cap (\mathcal{P}_K - \xi)$, à translation près, sont en nombre fini. À chaque ensemble $B_{2r_{min}}(0) \cap (\mathcal{P}_K - \xi)$, à translation près, on lui associe un point x_ξ de $B_{2r_{min}}(0) \cap (\mathcal{P}_K - \xi)$, tel que, pour tout $\xi' \in E$, si $B_{2r_{min}}(0) \cap (\mathcal{P}_K - \xi)$ et $B_{2r_{min}}(0) \cap (\mathcal{P}_K - \xi')$ ne diffèrent que par une translation d'un vecteur y , alors x_ξ et $x_{\xi'}$ ne diffèrent que par la même translation, i.e. $x_{\xi'} = x_\xi + y$ (il faut noter qu'il est toujours possible de faire un tel choix x_ξ). On pose $p_\xi = x_\xi + \xi$, alors $p_\xi \in \mathcal{P}_K$ et $\xi \longmapsto \xi - p_\xi$ est fortement $\mathcal{P}_K$ -équivariante. Par conséquent, la périodicité des dérivées partielles implique que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{\psi}(\xi)) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{\psi}(\xi) - \tilde{\psi}(p_\xi))$.

Reste à montrer que la fonction $\xi \longmapsto \tilde{\psi}(\xi) - \tilde{\psi}(p_\xi)$ est fortement $\mathcal{P}_K$ -équivariante. Soit $\xi, \xi' \in E$ tel que $B_R(0) \cap (\mathcal{P}_K - \xi) = B_R(0) \cap (\mathcal{P}_K - \xi')$, il existe $y \in E$, $\xi' = \xi + y$, comme la fonction $\xi \longmapsto \xi - p_\xi$ est fortement $\mathcal{P}_K$ -équivariante de rang $2r_{min}$ on a $p_{\xi'} = p_\xi + y$, donc

$$\tilde{\psi}(\xi') - \tilde{\psi}(p_{\xi'}) = \int_{p_{\xi'}}^{\xi'} d\psi = \int_{p_\xi + y}^{\xi + y} d\psi$$

après changement de variables on obtient $\tilde{\psi}(\xi') - \tilde{\psi}(p_{\xi'}) = \int_{p_{\xi}}^{\xi} d\psi = \tilde{\psi}(\xi) - \tilde{\psi}(p_{\xi})$, comme $d\tilde{\psi}$ est fortement $\mathcal{P}_K$ -équivariante de rang R , on en déduit que la fonction $\xi \mapsto \tilde{\psi}(\xi) - \tilde{\psi}(p_{\xi})$ est fortement $\mathcal{P}_K$ -équivariante de rang $r = \max\{2r_{\min}, R\}$. Par conséquent, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \tilde{\psi}$ est fortement $\mathcal{P}_K$ -équivariante.

□

COROLLAIRE 3.4.8. *L'application $\tilde{\psi}$ induit l'homomorphisme $\tilde{\psi}^* : \Omega_{s-\Lambda}^k \mathbb{R}^{N*} \longrightarrow \Omega_{s-\mathcal{P}_K}^k E^*$. Par conséquent, on a un homomorphisme de groupe :*

$$\tilde{\psi}^* : H_{s-\Lambda}^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \longrightarrow H_{s-\mathcal{P}_K}^k(E, \mathbb{R}),$$

avec $H_{s-\Lambda}^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ le groupe de degré k de cohomologie fortement Λ -équivariante.

On s'intéresse maintenant aux générateurs de $\mathcal{R}_I$. On définit l'application $\varphi : \mathcal{P}_K \longrightarrow \Lambda \subset \mathbb{R}^N$ par :

$$\varphi = \iota + \iota^\perp \gamma;$$

avec les inclusions $\iota : E \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ et $\iota^\perp : E^\perp \hookrightarrow \mathbb{R}^N$. Par définition, pour tout $h \in \mathcal{P}_K - \mathcal{P}_K$, l'application $\Delta_h \varphi : \mathcal{P}_K \cap (\mathcal{P}_K - h) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est fortement $\mathcal{P}_K$ -équivariante, donc d'après les lemmes 3.4.2 et 3.4.7, on déduit que l'application φ admet un prolongement lisse $\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{R}^N$, dont la différentielle $d\tilde{\varphi}$ est fortement $\mathcal{P}_K$ -équivariante. Ainsi $d\tilde{\varphi}$ peut définir jusqu'à N générateurs dans la cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante. En fait, à l'aide de l'application $\tilde{\varphi}$, on détermine une famille de générateurs de $H_{s-\mathcal{P}}^1(E, \mathbb{R})$, dont on détermine leur image par l'application q (défini au début de la section). En outre d'après le corollaire 3.4.8, on déduit que $\tilde{\varphi}^* : H_{s-\Lambda}^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \longrightarrow H_{s-\mathcal{P}_K}^k(E, \mathbb{R})$ est un homomorphisme de cohomologie. Afin de déterminer les générateurs du groupe mixte, il reste à démontrer que l'application $\tilde{\varphi}^*$ est injective (pour le degré 1).

LEMME 3.4.9. *L'application $\tilde{\varphi}^*$ ainsi définit, est injective pour $k = 1$.*

Démonstration. On veut montrer que $rg(\tilde{\varphi}^*) = rg(H_{s-\Lambda}^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})) = N$. Notons qu'on utilise la théorie de Sadun pour les cochaînes fortement $\mathcal{P}$ -équivariantes.

Soient $\mathcal{P}$ un ensemble de Delone coupe-et-projection, et $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ le pavage de Dirichlet associé à $\mathcal{P}$, qu'on muni d'une structure de complexe polyédral, sachant que les sommets des pavés de $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ sont les points de $\mathcal{P}$. Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$, on note $C_k(\mathcal{D}(\mathcal{P}), \mathbb{K})$

l'ensemble des k -chaînes sur $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ et $C^k(D(\mathcal{P}), \mathbb{K})$ l'ensemble des k -cochaînes sur $\mathcal{D}(\mathcal{P})$. L'application de bord $\partial_k : C_k(\mathcal{D}(\mathcal{P}), \mathbb{Q}) \longrightarrow C_{k-1}(\mathcal{D}(\mathcal{P}), \mathbb{Q})$ définit sur le complexe simplicial induit l'application cobord $\partial^* : C^k(\mathcal{D}(\mathcal{P}), \mathbb{Q}) \longrightarrow C^{k+1}(\mathcal{D}(\mathcal{P}), \mathbb{Q})$, telle que, pour tout $f \in C^k(\mathcal{D}(\mathcal{P}), \mathbb{Q})$, on a $\partial^* f = f \circ \partial$. Puisque $\mathcal{D}(\Lambda)$ est un complexe polyédral d'un espace contractible, alors toute 1-cochaîne est exacte (Lemme de Poincaré), i.e. tout élément α de $C^1(\mathcal{D}(\Lambda), \mathbb{Q})$ s'écrit de la forme $\partial^* \beta$, avec β un élément de $C^0(\mathcal{D}(\Lambda), \mathbb{Q})$. Comme les 1-cellules orientées de $\mathcal{D}(\Lambda)$ sont des vecteurs de Λ , alors ceux sont des éléments de $\Lambda - \Lambda$. Par conséquent, pour $[e] \in C_1(\mathcal{D}(\Lambda), \mathbb{Q})$ et $b \in C^0(\mathcal{D}(\Lambda), \mathbb{Q})$, on a $b \circ \partial([e]) = \Delta_e b(s(e))$ (avec $s(e)$ le sommet initial (ou source) du vecteur e). Donc, si $\Delta_e b$ est fortement Λ -équivariante alors $\partial^* b$ est fortement Λ -équivariante.

Un système de générateurs de $H_{s-\Lambda}^1(\mathcal{D}(\Lambda), \mathbb{Q})$ est donné par, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, les applications $\check{x}_i : \mathcal{D}^0(\Lambda) \longrightarrow \mathbb{Q}$ définient par,

$$\check{x}_i(v) = v_i = i^{eme} \text{ coordonnée du sommet } v,$$

or pour tout i , on a $\partial^* \check{x}_i = \mathbb{1}_{e_i}$. Donc $H_{s-\Lambda}^1(\mathcal{D}(\Lambda), \mathbb{Q}) = \langle \{\partial^* \check{x}_i | i = 1, \dots, N\} \rangle$ (dont on écrit les prolongements $dx_1, \dots, dx_N$).

D'après le lemme 3.4.2, l'application φ (resp. b) admet un prolongement lisse $\tilde{\varphi}$ (resp. $\tilde{b}$) tel que $d_E \tilde{\varphi}$ (resp. $d\tilde{b}$) est fortement $\mathcal{P}$ -équivariante (resp. Λ -équivariante). De plus, on obtient le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} [\partial^* b] & \in & H_{s-\Lambda}^1(\mathcal{D}(\Lambda), \mathbb{Q}) \xrightarrow{\varphi^*} H_{s-\mathcal{P}}^1(\mathcal{D}(\mathcal{P}), \mathbb{Q}) \\ \parallel & & \downarrow \wr \quad \quad \quad \downarrow j \\ [\partial^* b] & \in & H_{s-\Lambda}^1(\mathcal{D}(\Lambda), \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\check{\varphi}^*} H_{s-\mathcal{P}}^1(\mathcal{D}(\mathcal{P}), \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \psi \quad \quad \quad \downarrow \psi \\ [d\tilde{b}] & \in & H_{s-\Lambda}^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \xrightarrow{\tilde{\varphi}^*} H_{s-\mathcal{P}}^1(E, \mathbb{R}) \end{array}$$

avec $\check{\varphi}^*$ l'extension de φ^* au corps $\mathbb{R}$ et ψ est un isomorphisme d'après Sadun [28], dont une formule de l'isomorphisme réciproque est donnée par

$$\psi^{-1}(d\tilde{b})([e]) = \int_e d\tilde{b} = \partial^* b([e]).$$

(il y aura plus de précision sur cet isomorphisme au chapitre 4 ou encore dans [6]). Le diagramme ci-dessus est commutatif, en effet, la commutativité du premier diagramme est évidente, en revanche pour la seconde, on calcule $\check{\varphi}^* \circ \psi^{-1}$ et $\psi^{-1} \circ \tilde{\varphi}^*$ sur les générateurs de la cohomologie $H_{s-\Lambda}^1(\mathcal{D}(\Lambda), \mathbb{Q})$, i.e. pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$,

$$\check{\varphi}^* \circ \psi^{-1}(dx_i)([e]) = \check{\varphi}^*\left(\int_e dx_i\right) = \check{\varphi}^*(\partial^* \check{x}_i([e]))$$

$$\psi^{-1} \circ \tilde{\varphi}^*(dx_i)([e]) = \int_e \tilde{\varphi}^* dx_i = \int_e dx_i \circ \tilde{\varphi} = \partial^*(\check{x}_i \circ \tilde{\varphi})([e]),$$

donc $\check{\varphi}^* \circ \psi^{-1} = \psi^{-1} \circ \tilde{\varphi}^*$.

Tout d'abord, on démontre que $rg_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}^* \geq rg_{\mathbb{Q}} \varphi^*$. D'après le diagramme commutatif ci-dessus, on déduit que $rg_{\mathbb{R}}(\tilde{\varphi}^* \circ \psi) = rg_{\mathbb{R}}(\psi \circ \check{\varphi}^*)$ et $rg_{\mathbb{Q}}(\check{\varphi}^* \circ \iota) = rg_{\mathbb{Q}}(j \circ \varphi^*)$.

Comme, le corps $\mathbb{Q}$ est contenu dans $\mathbb{R}$, alors $rg_{\mathbb{Q}}(\check{\varphi}^* \circ j) = rg_{\mathbb{R}}(\check{\varphi}^* \circ j)$. De plus, comme ψ et j sont injectives, on en déduit que $rg_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}^* = rg_{\mathbb{R}}(\psi \circ \check{\varphi}^*) \leq rg_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}^*$ et $rg_{\mathbb{Q}} \varphi^* = rg_{\mathbb{Q}}(j \circ \varphi^*) \leq rg_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}^*$. Donc

$$rg_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}^* \geq rg_{\mathbb{Q}} \varphi^* \quad (3.4.2)$$

Pour démontrer que $rg_{\mathbb{Q}}(\varphi^*) = N$, on s'inspire du travail de Kellendonk et Putnam [17] sur l'application de Ruelle-Sullivan. Ainsi, on définit l'application $\tau : H_{s-\mathcal{P}}^1(\mathcal{D}(\mathcal{P}), \mathbb{Q}) \longrightarrow \Omega^1 E^*$ par

$$\langle \tau([\alpha]), v \rangle := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{(2r)^d} \int_{[-r, r]^d} \langle \tilde{\alpha}(x), v \rangle d\mu(x) \quad (3.4.3)$$

avec $[\alpha]$ la classe d'une 1-cochaîne $\alpha = \partial^* c$ et $\tilde{\alpha} = d\tilde{c}$ avec $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{c}$ des prolongements lisses de α et c (d'après le lemme 3.4.2, car pour tout vecteur $e \in \mathcal{P}$, i.e. vu comme élément de $\mathcal{P} - \mathcal{P}$, $\Delta_e c(s(e)) = \partial^* c([e])$ est $\mathcal{P}$ -équivariante), μ est la mesure de Lebesgue. Cette application est bien définie, car d'une part, étant donné que pour un ensemble coupe-et-projection $\mathcal{P}$, la mesure sur l'espace des pavages de $\mathcal{P}$ est érgodique (résultat démontré par Schlottmann [32]), l'existence de la limite est assurée par le théorème érgodique de Birkhoff. D'autre part, l'égalité 3.4.3 ne dépend pas du choix du représentant de la classe. En effet, soit α, β deux 1-cochaînes telles que $[\alpha] = [\beta]$, autrement dit, il existe une 0-cochaîne γ tel que $\alpha = \beta + \partial^* \gamma$. Montrons que $\langle \tau([\alpha]), v \rangle = \langle \tau([\beta]), v \rangle$, or la limite existe,

il suffit de montrer que $\langle \tau([\partial^* \gamma]), v \rangle = 0$, comme $\tilde{\gamma}$ est fortement $\mathcal{P}$ -équivariante donc bornée on en déduit, par le théorème de Stokes, que $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{(2r)^d} \int_{[-r,r]^d} \langle d\tilde{\gamma}(x), v \rangle d\mu(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{(2r)^d} \int_{[-r,r]^d} \langle \sum_{j=1}^d \frac{\partial \tilde{\gamma}(x)}{\partial x_j} dx_j, v \rangle d\mu(x) = 0$. De plus, τ ne dépend pas du choix des prolongements de α , i.e. soient α_1 et α_2 deux prolongements fortement $\mathcal{P}$ -équivariants de α , i.e. $\alpha_1|_{\mathcal{P}} = \alpha_2|_{\mathcal{P}}$, donc la différence $\alpha_1 - \alpha_2$ est une 1-forme fortement $\mathcal{P}$ équivariante $d\eta$, avec η constante sur $\mathcal{P}$ (pour plus de précision voir [21, section 4]). L'application τ est clairement un homomorphisme.

Reste à démontrer que $rg_{\mathbb{Q}}(\tau \circ \varphi^*) = N$ et de conclure. Tout d'abord, on démontre que $\tau([\varphi^* \partial^* c]) = \tau([\partial^* c \circ \iota])$, i.e. $\tau([\partial^* c \circ \iota^\perp \circ \tilde{\gamma}]) = 0$. Soit $(e_1, \dots, e_d)$ une base de E , et $(y_1, \dots, y_d)$ un système de coordonnées de E , ainsi on note $(dy_1, \dots, dy_d)$ la base de $\Omega^1 E^*$, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, pour tout $v \in E$, on a

$$\langle \tau([\partial^* c \circ \iota^\perp \circ \tilde{\gamma}]), v \rangle = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{(2r)^d} \int_{[-r,r]^d} \langle d_E \tilde{c} \circ \iota^\perp \tilde{\gamma}(y), v \rangle d\mu(y),$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{[-r,r]^d} \langle d_E \tilde{c} \circ \iota^\perp \tilde{\gamma}(y), v \rangle d\mu(y) &= \sum_{i=1}^d \int_{[-r,r]^d} \frac{\partial \tilde{c} \circ \iota^\perp \circ \tilde{\gamma}}{\partial y_i} \langle dy_i, v \rangle d\mu(y) \\ v = e_j & \\ &= \int_{[-r,r]^d} \frac{\partial \tilde{c} \circ \iota^\perp \circ \tilde{\gamma}}{\partial y_j} \langle dy_j, e_j \rangle d\mu(y) \end{aligned}$$

par conséquent, $\int_{[-r,r]^d} \frac{\partial \tilde{c} \circ \iota^\perp \circ \tilde{\gamma}}{\partial y_j} dy_1 \dots dy_d = \int_{[-r,r]^{d-1}} (\tilde{c} \circ \iota^\perp \circ \tilde{\gamma}(r, \tilde{y}) - \tilde{c} \circ \iota^\perp \circ \tilde{\gamma}(-r, \tilde{y})) dy_1 \dots d\hat{y}_j \dots dy_d$. La fonction $\tilde{\gamma}$ est bornée car faiblement $\mathcal{P}_K$ -équivariante, donc la fonction $\tilde{c} \circ \iota^\perp \circ \tilde{\gamma}$ est bornée. On en déduit que $\langle \tau([\partial^* c \circ \iota^\perp \circ \tilde{\gamma}]), v \rangle = 0$.

Or sur les générateurs $\{dx_i | i \in \{1, \dots, N\}\}$ de la cohomologie $H_{s-\Lambda}^1(\mathcal{D}(\mathcal{P}), \mathbb{Q})$, l'intégrand $\langle \iota^* dx_i(x), v \rangle$ de $\langle \tau([\iota^* \partial^* \tilde{x}_i]), v \rangle$ est constant. Par conséquent, $\langle \tau([\iota^* \partial^* \tilde{x}_i]), v \rangle = \langle \iota^* dx_i(x), v \rangle$. Comme l'espace des 1-formes constantes est isomorphe à l'espace dual de E , en supposant que la base $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)$ est associée au réseau Λ et $(x_1, \dots, x_N)$ un système de coordonnées de $\mathbb{R}^N$, ainsi la base $dx_1, \dots, dx_N$ est associée au réseau réciproque, donc

$$\langle \iota^* dx_i(x), v \rangle = \langle \pi(\epsilon_i^*), v \rangle$$

car $\pi = \iota^t = \iota^*$ (comme on travaille dans l'espace engendré par les 1-formes constantes).

Par conséquent,

$$\langle \{\tau([i^* \partial^* \tilde{x}_i]), i = 1, \dots, N\} \rangle = \pi(\mathbb{Q}\Lambda^{rec}).$$

Donc $rg_{\mathbb{Q}}(\tau \circ \varphi^*) = rg_{\mathbb{Q}}(\langle \{\tau(\partial^* \tilde{x}_i \circ \iota) | i = 1, \dots, N\} \rangle) = rg_{\mathbb{Q}}(\pi(\mathbb{Q}\Lambda^{rec}))$, or $\pi|_{\Lambda^{rec}}$ est injective (d'après Moody [23]), i.e. $rg_{\mathbb{Q}}(\pi(\mathbb{Q}\Lambda^{rec})) = N$, on en déduit que $rg_{\mathbb{Q}}(\tau \circ \varphi^*) = N$.

Par conséquent, on a $rg_{\mathbb{Q}}\varphi^* \geq rg_{\mathbb{Q}}(\tau \circ \varphi^*) = N$. Donc $rg_{\mathbb{R}}\tilde{\varphi}^* = N$, et l'application $\tilde{\varphi}^*$ est injective.

□

Calcul explicite pour les ensembles coupe-et-projection $N \longrightarrow d$

Notons que pour la fin de ce chapitre on écrit d au lieu de d_E pour la différentielle sur l'espace E .

THÉORÈME 3.4.10. $rg(q(Im\tilde{\varphi}^*)) = \dim E = d$

Démonstration. On commence par les calcul pour le cas $N \longrightarrow 1$. Notons e la base de E , $(e_1^\perp, \dots, e_{N-1}^\perp)$ une base de $E^\perp$, et $B = (e, e_1^\perp, \dots, e_{N-1}^\perp)$ est donc la base de $\mathbb{R}^N$. Soit $P \in GL_N(\mathbb{R})$ la matrice de passage de B à B_{can} , donc l'application $\tilde{\varphi}$ s'écrit à nouveau

$$\tilde{\varphi} = P^{-1}\iota + P^{-1}\iota^\perp\tilde{\gamma}.$$

Donc, la différentielle s'écrit

$$d\tilde{\varphi}(x) = P^{-1}(dx, 0, \dots, 0)^T + P^{-1}(0, d\tilde{\gamma}_1(x), \dots, d\tilde{\gamma}_{N-1}(x))^T.$$

avec $P^{-1} = (a_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, N\}^2}$, on a

$$d\tilde{\varphi}(x) = (a_{11}dx, \dots, a_{N1}dx)^T + \left(\sum_{j=1}^{N-1} a_{1j+1}d\tilde{\gamma}_j(x), \dots, \sum_{j=1}^{N-1} a_{Nj+1}d\tilde{\gamma}_j(x) \right)^T.$$

Ainsi les composantes $d\tilde{\varphi}_i$, $i \in \{1, \dots, N\}$, sont faiblement cohomologues à $a_{i1}dx$, i.e. $d\tilde{\varphi}_i - a_{i1}dx$ est combinaison linéaire des $d\tilde{\gamma}_i$ (avec $\tilde{\gamma}_i$ les composantes de l'application $\tilde{\gamma}$).

Pour le cas des ensembles coupe-et-projection $N \longrightarrow d$, un calcul analogue peut être

fait. On écrit donc

$$d\tilde{\varphi} = P^{-1}(dx_1, \dots, dx_d, 0, \dots, 0)^T + P^{-1}(0, \dots, 0, d\tilde{\gamma}_1(x), \dots, d\tilde{\gamma}_{N-d}(x))^T.$$

avec $P^{-1} = (a_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, N\}^2}$, on écrit donc

$$d\tilde{\varphi} = \left(\sum_{j=1}^d a_{1j} dx_j, \dots, \sum_{j=1}^d a_{Nj} dx_j \right)^T + \left(\sum_{j=d+1}^N a_{1j} d\tilde{\gamma}_{j-d}(x), \dots, \sum_{j=d+1}^N a_{Nj} d\tilde{\gamma}_{j-d}(x) \right)^T.$$

Comme $\{dx_i\}_i$ est une base, on déduit le résultat. $\square$

D'après la démonstration du théorème précédent, on déduit que $d\tilde{\varphi}_i - \sum_{j=1}^d a_{ij} dx_j$ est combinaison linéaire des $d\tilde{\gamma}_i(x)$, avec $i \in \{1, \dots, N-d\}$. On peut dire donc que les coefficients $d\tilde{\varphi}_i$ sont faiblement cohomologues à une combinaison linéaire finie de dx_i , $i \in \{1, \dots, d\}$.

Comme, on travaille avec des coefficients de $\mathbb{R}$, $H_{s-\mathcal{P}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ contient toujours un sous-espace complémentaire à $Im\tilde{\varphi}^*$, qu'on note $\mathcal{R}_0$ (comme le complémentaire de $Im\tilde{\varphi}^*$ n'est unique, on en choisit un). On écrit la décomposition du premier groupe de cohomologie fortement $\mathcal{P}_K$ -équivariante,

$$H_{s-\mathcal{P}}^1(E, \mathbb{R}) = Im\tilde{\varphi}^* \oplus \mathcal{R}_0.$$

COROLLAIRE 3.4.11. *Le rang du groupe mixte vérifie les inégalités suivantes*

$$d \leq rg(H_{m-\mathcal{P}}^1(E, \mathbb{R})) \leq rg(H_{s-\mathcal{P}}^1(E, \mathbb{R})) - (N-d).$$

Démonstration. La première inégalité provient de $rg(q(Im(\tilde{\varphi}^*))) \leq rg(H_{m-\mathcal{P}}^1(E, \mathbb{R}))$.

D'après la décomposition de $H_{s-\mathcal{P}}^1(E, \mathbb{R})$, on a $rg(\mathcal{R}_0) = rg(H_{s-\mathcal{P}}^1(E, \mathbb{R})) - rg(\tilde{\varphi}^*) = rg(H_{s-\mathcal{P}}^1(E, \mathbb{R})) - N$. Or $H_{m-\mathcal{P}}^1(E, \mathbb{R}) = q(Im\tilde{\varphi}^* \oplus \mathcal{R}_0)$, donc

$$rg(H_{m-\mathcal{P}}^1(E, \mathbb{R})) = rg(q(Im\tilde{\varphi}^* \oplus \mathcal{R}_0)) \leq rg(q(Im\tilde{\varphi}^*)) + rg(q(\mathcal{R}_0))$$

or $rg(q(Im\tilde{\varphi}^*)) = d$ (d'après le calcul précédent) et comme $rg(q(\mathcal{R}_0)) \leq rg(\mathcal{R}_0) =$

$rg(H_{s-\mathcal{P}}^1(E, \mathbb{R})) - N$ donc

$$rg(H_{m-\mathcal{P}}^1(E, \mathbb{R})) \leq d + rg(\mathcal{R}_0) \leq d + rg(H_{s-\mathcal{P}}^1(E, \mathbb{R})) - N.$$

□

3.4.3 Les générateurs de $\mathcal{R}_0$.

Pour finir le calcul du groupe mixte, il faut connaître les générateurs qui ne sont pas dans $Im\tilde{\varphi}^*$. On n'a pas de méthode générale permettant le calcul de $q(\mathcal{R}_0)$ pour tous les pavages coupe-et-projection. Cependant, ce calcul se fait pour quelques cas particuliers.

Cas des ensembles coupe-et-projection $2 \longrightarrow 1$ canoniques

Afin d'avoir une idée bien précise, on refait le calcul pour $N = 2$ et $d = 1$. Notons aussi qu'il est bien connu que le premier groupe de cohomologie fortement $\mathcal{P}_K$ -équivariante des ensembles coupe-et-projection $2 \longrightarrow 1$, dont la zone d'acceptance est canonique, est de rang deux, i.e. $H_{s-\mathcal{P}_K}^1(E, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$ [13].

Soit Λ un réseau régulier de $\mathbb{R}^2$ (par exemple $\mathbb{Z}^2$), on considère le schéma coupe-et-projection $\Lambda \subset E \oplus E^\perp$. Notons $B_{can} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, qui est aussi une base du réseau Λ . Soit θ l'angle de la pente de la droite E par rapport à e_1 . L'application $\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définit dans la base associée à la décomposition $E + E^\perp$, par

$$\tilde{\varphi}(x) = (\tilde{\varphi}_1(x), \tilde{\varphi}_2(x)) = \iota(x) + \iota^\perp \tilde{\gamma}(x) = (x, 0)^T + (0, \tilde{\gamma}(x))^T.$$

On écrit $P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base de $E + E^\perp$ dans la base B , par conséquent on a

$$\tilde{\varphi}(x) = P^{-1}(x, 0)^T + P^{-1}(0, \tilde{\gamma}(x))^T.$$

$$\tilde{\varphi}(x) = (x \cos \theta, x \sin \theta)^T + (-\tilde{\gamma}(x) \sin \theta, \tilde{\gamma}(x) \cos \theta)^T.$$

Donc la différentielle s'écrit

$$d\tilde{\varphi}_1(x) = \cos \theta dx + \sin \theta d\tilde{\gamma}(x).$$

$$d\tilde{\varphi}_2(x) = -\sin \theta dx + \cos \theta d\tilde{\gamma}(x).$$

Le deux générateurs $d\tilde{\varphi}_1$ et $d\tilde{\varphi}_2$ ne sont pas fortement cohomologues. En revanche, si on note $\sim_w$ la relation d'équivalence "être faiblement cohomologue", on a

$$d\tilde{\varphi}_1(x) \sim_w \cos \theta dx.$$

$$d\tilde{\varphi}_2(x) \sim_w -\sin \theta dx.$$

Donc $d\tilde{\varphi}_1 \sim_w -\frac{1}{\tan \theta} d\tilde{\varphi}_2$.

THÉORÈME 3.4.12. *Tous les pavages coupe-et-projection $2 \longrightarrow 1$, dont la zone d'acceptance est canonique, admettent un groupe mixte de rang 1, i.e.*

$$Z_{s-\mathcal{P}_K}^1(E, \mathbb{R}) / B_{w-\mathcal{P}_K}^1(E, \mathbb{R}) \cap Z_{s-\mathcal{P}_K}^1(E, \mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

Démonstration. Comme $rg(H_{s-\mathcal{P}}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})) = 2$, et $d = rg(H_{s-\mathcal{P}}^1(E, \mathbb{R}) - 1$ l'inégalité du corollaire 3.4.11 devient une égalité. $\square$

Notamment, si $\tan \theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or), alors $\mathcal{P}_K$ est le pavage de Fibonacci, donc le groupe mixte de celui-ci est de rang 1.

Pavage de Penrose

La cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante est $H_{s-\mathcal{P}}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^5$ [1]. La décomposition induite par $\tilde{\varphi}^*$, s'écrit

$$H_{s-\mathcal{P}}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) = \text{Im} \tilde{\varphi}^* + \mathcal{R}_0.$$

Comme le pavage de Penrose est MLD à un ensemble coupe-et-projection $4 \longrightarrow 2$, on a $rg(\text{Im} \tilde{\varphi}^*) = 4$ (voir [9]), et donc $rg(\mathcal{R}_0) = 1$.

Cas de $\text{Im} \tilde{\varphi}^*$: Les générateurs sont donnés ici par l'application $\tilde{\varphi}$ (défini précédemment), d'après le théorème 3.4.10 on a $q(\text{Im} \tilde{\varphi}^*) = \mathbb{R}^2$.

Cas de $\mathcal{R}_0$: Reste maintenant à savoir si le dernier générateur, i.e. le cinquième générateur de la cohomologie, persiste au passage du groupe mixte. Autrement dit, est ce que le cinquième générateur est faiblement cohomologue aux éléments de $q(Im\tilde{\varphi}^*)$?

La réponse à cette question est non ! En fait, nous allons construire une 1-forme α vérifiant les propriétés suivantes :

- 1) Invariante par le groupe C_5 ;
- 2) Fortement $\mathcal{P}$ -équivariante ;
- 3) Fermée ;
- 4) Non exacte faiblement $\mathcal{P}$ -équivariante.

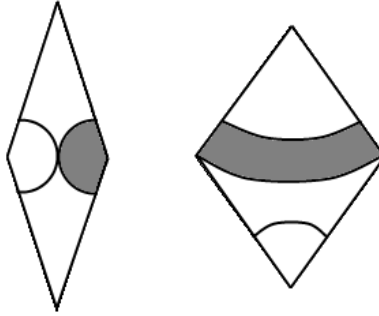
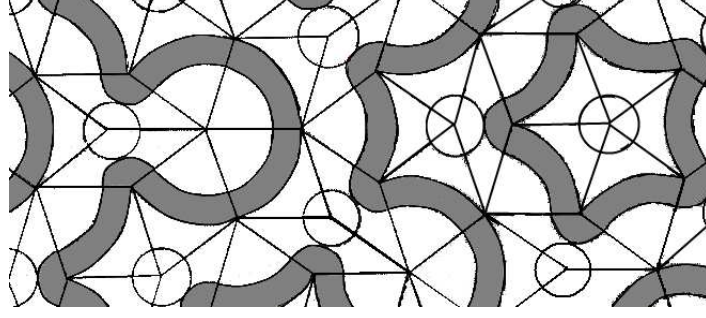


FIGURE 3.1 – Décoration des pavés de Penrose par les courbes.

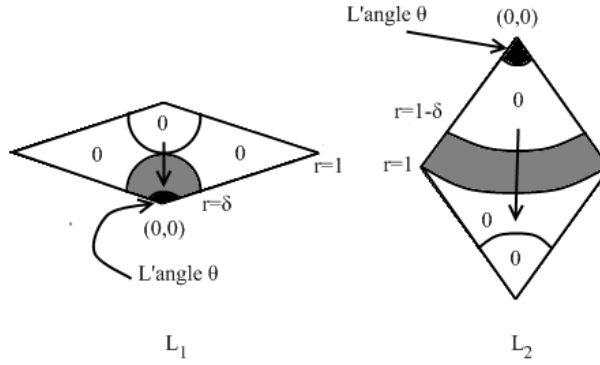
On regarde le pavage invariant par l'action du groupe C_5 , c'est le pavage dit de Cartwheel, avec sa version en losanges (voir [15, Chapitre 10]). La décoration du pavage de Cartwheel est représentée sur la figure 3.1. Les courbes sont invariantes par C_5 . Cette décoration est localement dérivable du pavage de Penrose.

Sur la figure 3.3, on construit ce cinquième générateur α qu'on écrit en coordonnées polaires (r, θ) sur les losanges L_1 et L_2 (θ étant l'angle entre les arêtes des losanges comme indiqué sur la figure 3.3). Soient $\delta > 0$ (la largeur de la bande grise sur la figure 3.3) et une fonction lisse b sur $\mathbb{R}$, à support compact inclus dans un intervalle de longueur δ , i.e. $supp(b) = [0, \delta]$, telle que $\int b = 1$. Ainsi on écrit

$$\begin{aligned}\alpha|_{L_1}(r, \theta) &= -b(r)dr \\ \alpha|_{L_2}(r, \theta) &= b(r - 1 + \delta)dr,\end{aligned}$$

FIGURE 3.2 – Pavage de Penrose décoré par des courbes et bandes C_5 -invariantes.

en dehors de la bande de largeur δ , la 1-forme α est nulle. On suppose, de plus, que la fonction b est symétrique par rapport au point $\frac{\delta}{2}$, ainsi la 1-forme est continue et donc lisse (car b est lisse).

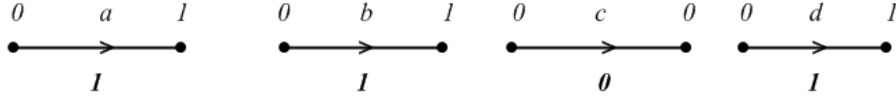
FIGURE 3.3 – Le générateur de $\mathcal{R}_0$ sur les losanges décorés.

Cette 1-forme α vérifie les propriétés ci-dessus, i.e.,

- (i) α est C_5 -invariante car toutes les courbes fermées sont invariantes par le groupe C_5 (car le pavage des Cartwheel est invariant par C_5 [15]) ;
- (ii) étant donné que la décoration est localement dérivable du pavage de Penrose, alors α est fortement $\mathcal{P}$ -équivariante.
- (iii) α est une 1-forme fermée, car α dépend que d'une variable à savoir r ;
- (iv) D'après le lemme de Poincaré α est une 1-forme exacte, i.e. il existe une fonction $\beta \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\alpha = d\beta$. De plus, α n'appartient pas à $q(\text{Im}\tilde{\varphi}^*)$.

Il reste à démontrer le point (iv). Tout d'abord, on démontre que β n'est pas $\mathcal{P}$ -équivariante au sens faible et fort. Puisque, toute fonction $\mathcal{P}$ -équivariante est une fonction bornée, il suffit de montrer que β n'est pas une fonction bornée.

À l'aide de la décoration par les courbes et de la substitution du pavage de Penrose (voir chapitre 1), on peut coder l'information de la 1-forme α par un 4-uplet d'entiers. Tout d'abord, il faut noter que l'orientation des arêtes est donnée par l'orientation des flèches sur les courbes (voir figure 3.3). De plus, le 4-uplet d'entiers correspond au poids sur les quatres arêtes a , b , c et d du pavage (dans le sens d'orientation). Par exemple pour l'arête a : on dit que a a pour poids 1 car il coupe une fois la courbe (voir la figure le chiffre sous chaque arête orientée). Il est possible aussi de mettre un label sur chaque sommet, avec le choix du label 0 à gauche (comme sur le dessin)



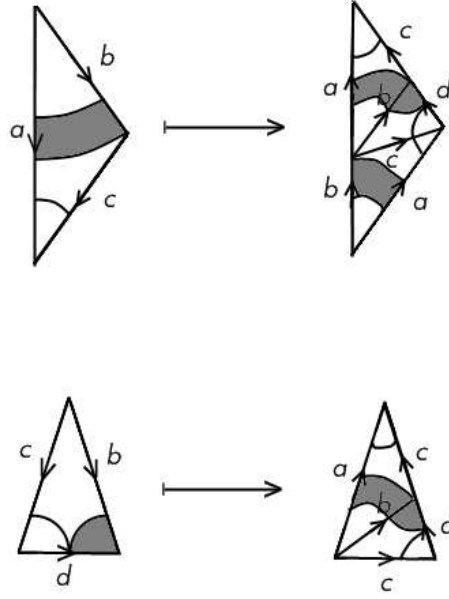
Donc la 1-forme α est représentée par le vecteur :

$$v_\alpha = v_{d_E \beta} = (\beta(\partial a), \beta(\partial b), \beta(\partial c), \beta(\partial d)) = \begin{pmatrix} \beta(t(a)) - \beta(s(a)) \\ \beta(t(b)) - \beta(s(b)) \\ \beta(t(c)) - \beta(s(c)) \\ \beta(t(d)) - \beta(s(d)) \end{pmatrix}^T$$

avec $\beta(\partial \cdot)$ le poids de l'arête en question, $t(\cdot)$ le sommet de droite et $s(\cdot)$ le sommet de gauche (par rapport à l'orientation du dessin).

Ainsi, on écrit la substitution (de la figure 3.4) suivante :

$$\rho : \begin{cases} a \longrightarrow a^{-1}b^{-1} \\ b \longrightarrow c^{-1}d^{-1} \\ c \longrightarrow a^{-1} \\ d \longrightarrow c \end{cases}$$

FIGURE 3.4 – Substitution donnant la décoration par les courbes C_5 -invariantes.

dont la matrice d'incidence est donnée par

$$M_\rho = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres de cette matrice sont toutes de module 1, i.e. -1 avec multiplicité deux, $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et son conjugué $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

Par conséquent, avec une telle règle sur les arêtes (qui donne le cinquième générateur), on obtient le vecteur $v_\alpha = (1, 1, 0, 1)$ qui modélise α sur les premiers pavés (ou superpavés d'ordre 0) de la substitution. Donc $v_\alpha M_\rho^p$ représente la 1-forme α dans le superpavé d'ordre p . On démontre, par récurrence sur p , que

$$v_\alpha M_\rho^p = (-1)^p (p+1, 1, p, -p+1),$$

on observe que les coefficients de $v_\alpha M_\rho^p$ ne sont pas bornés (pour $p \rightarrow \infty$) et donc que la fonction β n'est pas bornée. On en déduit que β n'est pas $\mathcal{P}$ -équivariante. Il resta à montrer que cette 1-forme α n'est pas dans l'image $q(\text{Im} \tilde{\varphi}^*)$.

LEMME 3.4.13. $[\alpha] \notin q(\text{Im} \tilde{\varphi}^*)$.

Démonstration. τ est l'application définie dans la démonstration du lemme 3.4.9. Comme $rg_{\mathbb{R}}(\tau(Im\tilde{\varphi}^*)) = 2$, il existe deux générateurs $[df_1], [df_2]$ dans $Im\tilde{\varphi}^*$ tel que : $\tau([df_1])$ et $\tau([df_2])$ soient linéairement indépendants et df_1, df_2 ne sont pas faiblement cohomologues. En effet, un tel choix est toujours possible car si df_1 est faiblement cohomologue à df_2 alors $\tau([df_1])$ et $\tau([df_2])$ ne sont pas linéairement indépendants.

Si $[\alpha]$ est élément de $q(Im\tilde{\varphi}^*)$, i.e. il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$[\alpha] = \lambda_1[df_1] + \lambda_2[df_2],$$

à l'aide de l'application τ , on écrit

$$\tau([\alpha]) = \lambda_1\tau([df_1]) + \lambda_2\tau([df_2]).$$

Or la 1-forme α est C_5 -invariante, donc $\tau([\alpha])$ est C_5 -invariante, i.e. égale à zéro. D'où $\lambda_1\tau([df_1]) + \lambda_2\tau([df_2]) = 0$, par l'indépendance des générateurs on obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Par conséquent, $[\alpha] = 0$, i.e. $\alpha \in B_{w-\mathcal{P}}^1(E, \mathbb{R})$, ce qui est contradictoire. Donc $\alpha \notin q(Im\tilde{\varphi}^*)$.

□

Alors, le cinquième générateur persiste au passage au groupe mixte, i.e. $q(\mathcal{R}_0) = \mathbb{R}$.

THÉORÈME 3.4.14. *Pour le pavage de Penrose*

$$H_{m-\mathcal{P}}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^3.$$

Pavage Octogonal

De la même manière, on calcule le groupe mixte pour le pavage Octogonal. La cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante pour le pavage Octogonal est aussi de rang cinq, i.e. $H_{s-\mathcal{P}}^1(E, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^5$ [13]. Montrons que le groupe mixte admet aussi trois générateurs, comme pour la pavage de Penrose. En fait, la construction du cinquième générateur α se fait de manière analogue que pour le pavage de Penrose.

La cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante, $H_{s-\mathcal{P}}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^5$, on obtient aussi la dé-

composition

$$H_{s-\mathcal{P}}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) = \text{Im} \tilde{\varphi}^* \oplus \mathcal{R}_0,$$

Pour le sous-espace $\text{Im} \tilde{\varphi}^*$, les générateurs sont aussi donnés par l'application $\tilde{\varphi}$, comme pour Penrose, on a donc $\text{Im} \tilde{\varphi}^* / \sim_w = \mathbb{R}^2$.

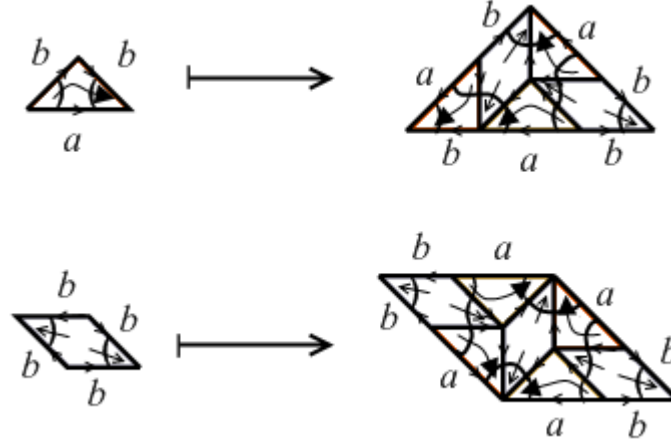
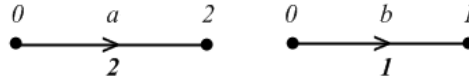


FIGURE 3.5 – Substitution donnant le générateur de $\mathcal{R}_0$ du pavage octogonal.

Pour le cas du sous-espace $\mathcal{R}_0$, on procède de même que pour le pavage de Penrose. On décore les pavés du pavage octogonal par des courbes fermées invariantes par le groupe C_4 (voir figure 3.5). Par la suite, on modélise la 1-forme α par un vecteur, en utilisant la même règle que pour le pavage de Penrose (voir dessin ci-dessous).



À l'aide de la substitution du pavage octogonal (donnée au chapitre 1) et cette décoration, on déduit la substitution suivante, notée σ .

$$\sigma : \begin{cases} a \longrightarrow b^{-1}a^{-1}b \\ b \longrightarrow a^{-1}b \end{cases}$$

avec la matrice de la substitution

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on obtient ainsi le vecteur $v_\alpha = (2, 1)$ qui modélise α sur le premier pavé de la substitution, et donc $v_\alpha M_\sigma^p$ représente la 1-forme α dans le superpavé d'ordre p . On a après calcul si p est pair, alors $M_\sigma^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et si p est impaire, on a $M_\sigma^p = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc

$$v_\beta M_\sigma^p = \begin{cases} (-2, -1) & \text{si } p \text{ est pair} \\ (2, 1) & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}$$

Par conséquent, la fonction β est bornée sur les sommets des arêtes des superpavés d'ordre p . Donc l'argument utilisé pour la pavage de Penrose n'est plus valable. En revanche, cette fonction β est tout de même non bornée. On démontre ce fait en regardant le mot $\sigma^n(a)$ avec le codage ci-dessus.

LEMME 3.4.15. (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\beta(\partial\sigma^{2n}(a)) = \beta(\partial a)$ et $\beta(\partial\sigma^{2n}(b)) = \beta(\partial b)$;

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sigma^{2n+1}(b) = v_{2n+1}\sigma^0(b)\sigma^2(b) \cdots \sigma^{2n}(b),$$

avec v_n le préfixe ;

(iii) pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sigma^{2n+1}(a) = w_{2n+1}\sigma^0(b)\sigma^2(b) \cdots \sigma^{2n}(b),$$

avec w_n le préfixe.

Démonstration. (i) immédiat par récurrence.

(ii) On raisonne par récurrence,

- on suppose jusqu'au rang $\sigma^{2n+1}(b) = v_{2n+1}b\sigma^2(b) \cdots \sigma^{2n}(b)$;
- calculons $\sigma^{2n+3}(b) = \sigma^{2n+1}(\sigma^2(b))$, avec $\sigma^2(b) = v_2b\sigma(b)$, on a donc $\sigma^{2n+3}(b) = \sigma^{2n+1}(v_2b\sigma(b)) = \sigma^{2n+1}(v_2)\sigma^{2n+1}(b)\sigma^{2n+2}(b)$, par hypothèse de récurrence, on en déduit

$$\sigma^{2n+3}(b) = \sigma^{2n+1}(v_2)v_{2n+1}b\sigma^2(b) \cdots \sigma^{2n}(b)\sigma^{2n+2}(b).$$

(iii) On calcul $\sigma^{2n+1}(a) = \sigma^{2n-1}(\sigma^2(a))$ or $\sigma^2(a) = w_2 b \sigma(b)$ donc

$$\sigma^{2n+1}(a) = \sigma^{2n-1}(w_2 b \sigma(b)) = \sigma^{2n-1}(w_2) \sigma^{2n-1}(b) \sigma^{2n}(b)$$

d'après la propriété (ii), on a $\sigma^{2n+1}(a) = w_{2n+1} b \sigma^2(b) \cdots \sigma^{2n-2}(b) \sigma^{2n}(b)$, avec $w_{2n+1} = \sigma^{2n-1}(w_2) v_{2n-1}$ $\square$

Conclusion : Comme $\beta(\partial a) = \beta(\partial \sigma^{2n+1}(a)) = \beta(\partial w_{2n+1}) + \sum_{p=0}^n \beta(\partial \sigma^{2p}(b))$ i.e. $\beta(\partial a) = \beta(\partial w_{2n+1}) + (n+1)\beta(\partial b)$ Par conséquent, $\beta(\partial w_{2n+1}) = 2 - (n+1)$. On en déduit que la fonction β n'est pas bornée, donc non $\mathcal{P}$ -équivariante.

LEMME 3.4.16. $[\alpha] \notin q(Im\tilde{\varphi}^*)$.

Démonstration. Comme la 1-forme α est C_4 -invariante, on procède de la même manière qu'au lemme 3.4.13. $\square$

On en déduit que ce cinquième générateur α persiste au passage au groupe mixte, i.e. $q(\mathcal{R}_0) = \mathbb{R}$.

THÉORÈME 3.4.17. *Pour le pavage Octogonal,*

$$H_{m-\mathcal{P}}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^3.$$

Chapitre 4

LA COHOMOLOGIE PV DES PAVAGES

4.1 Introduction

Ce chapitre est la traduction d'une grande partie de l'article [6]. Cette partie est la contribution de mon travail dans cet article. La cohomologie de Pimsner-Voiculescu est une nouvelle venue dans la cohomologie des pavages. Celle-ci introduite par Jean Bellissard et son étudiant Jean Savinien. Ils ont démontré que la cohomologie de Čech de l'espace des pavages est isomorphe à la cohomologie dite de Pimsner-Voiculescu. L'idée de construction de cette cohomologie est basée sur le fait que le pavage polyédral admet une structure de Δ -complexe, qui se transporte sur les approximants Γ_k . Ainsi, on définit cette notion de Δ -transversale, qui est tout simplement l'union disjointe¹ des transversales canoniques de chaque ensemble de Delone dont les éléments sont les pointes² des n -cellules du n -squelettes $\mathcal{P}^n$.

Bien qu'il ait été déjà démontré, d'une part, que la cohomologie de Čech de l'espace des pavages est isomorphe à la cohomologie PV , et d'autre part, que la cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante est isomorphe à la cohomologie de Čech, l'objectif de ce chapitre est d'explicitier un isomorphisme entre la cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante et la cohomologie PV , par le biais de la cohomologie des pavages définie comme limite directe des cohomologies cellulaires des approximants Γ_k .

¹L'union disjointe sur la dimension des squelettes $\mathcal{P}^n$

²Punctures

Le travail effectué dans ce chapitre présente un oeil nouveau sur les différentes versions de la cohomologie $\mathcal{P}$ -équivariante, en ce sens il permet d'avoir un lien plus direct avec la cohomologie PV. Après avoir établi un isomorphisme entre la cohomologie des pavages et cohomologie PV (on utilise les mêmes arguments qu'en [7]). Ainsi, nous sommes en mesure de reformuler la cohomologie faiblement $\mathcal{P}$ -équivariante et le groupe mixte en termes des différentes versions de la cohomologie PV.

Pour le rappel des notions de base sur les notations ainsi que les définitions de base, on se réfère à la section 2.4 du chapitre 2 de cette thèse. Dans ce chapitre, on établit tout d'abord, par la propriété universelle sur les limites directes, l'existence de l'isomorphisme entre la cohomologie PV et la limite directe des cohomologies cellulaires des Γ_k . Ensuite, on étend cet isomorphisme à la cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante et on démontre que celui-ci se prolonge à un homomorphisme entre la cohomologie faiblement $\mathcal{P}$ -équivariante, introduite par Kellendonk et Putnam, et un nouveau groupe de cohomologie qu'on appellera la cohomologie PV faible.

4.2 Un isomorphisme explicite...

Notre premier objectif est d'établir une relation entre les $\mathbb{Z}$ -modules $C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{Z})$ et les cochaînes de $C^n(\Gamma_k, \mathbb{Z})$. Il faut rappeler que la limite inductive des $\mathbb{Z}$ -modules $C^n(\Gamma_k, \mathbb{Z})$ est, à isomorphisme près, déterminée par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C^n(\Gamma_i, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi_{ij}} & C^n(\Gamma_j, \mathbb{Z}) \\ & \searrow \pi_i \quad \swarrow \pi_j & \\ & \varinjlim_l C^n(\Gamma_l, \mathbb{Z}) & \end{array}$$

Dans ce cas les applications π_{ii+1} sont induites par les applications α_i ³ (définies au chapitre 1, définition 1.4.8).

On définit maintenant les applications linéaires $p_i : C^n(\Gamma_i, \mathbb{Z}) \longrightarrow C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{Z})$

$$p_i(1_\sigma) = 1_{\Xi_\Delta(\sigma)}.$$

³The forgetful maps

avec $\mathbb{1}_\sigma$ étant la n -chaîne qui vaut 1 sur la n -cellule σ et 0 sur toute autre n -cellule. Ces applications sont bien définies, car l'ensemble $C_n(\Gamma_i, \mathbb{Z})$ est un groupe abélien libre de base $\mathcal{S}_i^n$. Ces applications induisent un nouveau diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C^n(\Gamma_i, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi_{ij}} & C^n(\Gamma_j, \mathbb{Z}) \\ & \searrow p_i \quad \swarrow p_j & \\ & C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{Z}) & \end{array}$$

D'après la propriété universelle des limites inductives il existe un unique homomorphisme

$$f : \varinjlim_l C^n(\Gamma_l, \mathbb{Z}) \longrightarrow C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{Z})$$

tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} C^n(\Gamma_i, \mathbb{Z}) & & \xrightarrow{\pi_{ij}} & & C^n(\Gamma_j, \mathbb{Z}) \\ & \searrow \pi_i & & \swarrow \pi_j & \\ & & \varinjlim_l C^n(\Gamma_l, \mathbb{Z}) & & \\ & \searrow p_i & \downarrow f & \swarrow p_j & \\ & & C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{Z}) & & \end{array}$$

En fait, cet homomorphisme est uniquement déterminé par la relation

$$f \circ \pi_i = p_i \quad i \in \mathbb{N}.$$

LEMME 4.2.1. *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} C^{n-1}(\Gamma_k, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{d_S} & C^n(\Gamma_k, \mathbb{Z}) \\ p_k \downarrow & & \downarrow p_k \\ C(\Xi_\Delta^{n-1}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{d_{PV}} & C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{Z}) \end{array}$$

Démonstration. Tout d'abord rappelons la définition de l'opérateur de différentiation simpliciale d_S . Pour $\sigma \in C_n(\Gamma_k)$

$$d_S(\mathbb{1}_\sigma) = \sum_{\tau \in C_{n+1}(\Gamma_k)} o_{\sigma\tau} \mathbb{1}_\tau$$

Dans la même idée, réinterprétons la différentielle PV notée d_{PV} , pour une fonction indicatrice sur la zone d'acceptance d'un n -simplexe σ , on écrit

$$d_{PV}(\mathbb{1}_{\Xi_{\Delta}(\sigma)}) = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_0^{n+1}} o_{\sigma\tau} \theta_{\sigma\tau} \mathbb{1}_{\Xi_{\Delta}(\sigma)}$$

Donc, la commutativité est donnée par

$$p_k \circ d_S(\mathbb{1}_{\sigma}) = \sum_{\tau \in \mathcal{C}_{n+1}(\Gamma_k)} o_{\sigma\tau} \mathbb{1}_{\Xi_{\Delta}(\tau)}$$

et

$$d_{PV} \circ p_k(\mathbb{1}_{\sigma}) = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_0^{n+1}} o_{\sigma\tau} \theta_{\sigma\tau} \mathbb{1}_{\Xi_{\Delta}(\sigma)}.$$

En fait, l'isométrie partielle $\theta_{\sigma\tau}$ translate la fonction caractéristique $\mathbb{1}_{\Xi_{\Delta}(\sigma)}$ vers la fonction caractéristique fonction $\mathbb{1}_{\Xi_{\Delta}(\tau)}$. Par conséquent, $d_{PV} \circ p_k = p_k \circ d_S$. $\square$

COROLLAIRE 4.2.2. *Le morphisme f commute avec les différentielles, ce qui induit un morphisme f^* entre les groupes de cohomologies. De plus, pour tout $i \leq j$, le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccccc}
 H(\Gamma_i, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi_{ij}^*} & & \xrightarrow{\pi_{ij}^*} & H(\Gamma_j, \mathbb{Z}) \\
 & \searrow \pi_i^* & & \swarrow \pi_j^* & \\
 & & \varinjlim_l H(\Gamma_l, \mathbb{Z}) & & \\
 & \searrow p_i^* & \downarrow f^* & \swarrow p_j^* & \\
 & & H_{PV}(\Gamma_0, C(\Xi_{\Delta}, \mathbb{Z})) & &
 \end{array}$$

Démonstration. Le fait que f commute avec les différentielles est une conséquence de l'égalité suivante $f \circ \pi_i = p_i$, de plus, tout élément dans la limite inductive appartient à l'image de π_i pour certains i .

Puisque l'application p_i commute avec les différentielles, alors celle-ci induit un homomorphisme de cohomologie noté p_i^* . Par functorialité, alors nous obtenons le diagramme

commutative suivant

$$\begin{array}{ccc}
 H(\Gamma_i, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi_{ij}^*} & H(\Gamma_j, \mathbb{Z}) \\
 & \searrow p_i^* \quad \swarrow p_j^* & \\
 & H_{PV}(\Gamma_0, C(\Xi_\Delta, \mathbb{Z})) &
 \end{array}$$

La propriété universelle implique l'existence d'un unique homomorphisme $\varphi : \varinjlim H(\Gamma_i, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{PV}(\Gamma_0, C(\Xi_\Delta, \mathbb{Z}))$ tel que $p_i^* = \varphi \circ \pi_i^*$. Cependant l'application f est donnée par $p_i = f \circ \pi_i$. Donc, par unicité nous avons $\varphi = f^*$. $\square$

LEMME 4.2.3. *Les applications p_i sont injectives.*

Démonstration. Soient $i \in \mathbb{N}$ fixé, et $\alpha \in C^n(\Gamma_i, \mathbb{Z})$ tel que $p_i(\alpha) = 0$, on écrit

$$\alpha = \sum_{\sigma \in S_i^n} n_\sigma \mathbb{1}_\sigma$$

avec $n_\sigma \in \mathbb{Z}$. Alors pour tout $\xi \in \Xi_\Delta$ on a

$$p_i(\alpha)(\xi) = \sum_{\sigma \in S_i^n} n_\sigma \mathbb{1}_{\Xi_\Delta(\sigma)}(\xi).$$

Soit ξ dans $\Xi_\Delta(\sigma_0)$ avec une n -cellule $\sigma_0 \in S_i^n$. Par conséquent, ξ contient un amas à l'origine, qui est dans la classe de translation d'une n -face décorée par sa i^{eme} couronne donnée par σ_0 (la puncture de cette face est placée à l'origine). Donc

$$\mathbb{1}_{\Xi_\Delta(\sigma)}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma = \sigma_0, \\ 0 & \text{if } \sigma \neq \sigma_0. \end{cases}$$

En particulier, $p_i(\alpha)(\xi) = 0$ implique $n_{\sigma_0} = 0$. Étant donné que ξ varie, donc tous les coefficients n_σ sont nuls. Donc l'application p_i est injective. $\square$

LEMME 4.2.4. *Pour tout $\gamma \in C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{Z})$ il existe $k \in N$ tel que $\gamma \in \text{Im}(p_k)$.*

Démonstration. Soit $\gamma \in C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{Z})$. D'après le corollaire 2.4.5, il est possible d'écrire

$$\gamma = \sum_{\sigma \in S^n} n_\sigma \mathbb{1}_{\Xi_\Delta(\sigma)}$$

tel que les coefficients n_σ sont tous nuls sauf un nombre fini, car γ est une fonction continue sur un ensemble de Cantor compact à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Il existe $k_\sigma \in \mathbb{N}$ tel que σ est une n -cellule dans Γ_{k_σ} et $p_{k_\sigma}(\mathbb{1}_\sigma) = \mathbb{1}_{\Xi_\Delta(\sigma)}$. Par conséquent $\mathbb{1}_{\Xi_\Delta(\sigma)} \in \text{Im}(p_{k_\sigma})$. Par construction nous avons $\text{Im}(p_k) \subset \text{Im}(p_{k+1})$. Donc $\gamma \in \text{Im}(p_k)$ avec $k = \max_\sigma(k_\sigma)$. $\square$

THÉORÈME 4.2.5 ([6]). *L'application f^* est un isomorphisme de cohomologie.*

Démonstration. *Injectivité :* Soit $[\omega] \in \varinjlim_l H^n(\Gamma_l, \mathbb{Z})$ tel que, $0 = f^*([\omega]) = [f(\omega)]$. Donc il existe $\gamma \in C(\Xi_\Delta^{n-1}, \mathbb{Z})$ tel que $f(\omega) = d_{PV}\gamma$. D'après le lemme 4.2.4, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in C^{n-1}(\Gamma_k, \mathbb{Z})$, tel que $f(\omega) = d_{PV}(p_k(\alpha)) = p_k(d_S\alpha)$. Or $\omega \in \varinjlim_l C^n(\Gamma_l, \mathbb{Z})$, par conséquent il existe une n -cochaîne $\omega_k \in C^n(\Gamma_k, \mathbb{Z})$ telle que, $\pi_k(\omega_k) = \omega$ et $f(\pi_k(\omega_k)) = p_k(d_S\alpha)$. Puisque $p_k = f \circ \pi_k$, nous avons $p_k(\omega_k) = p_k(d_S\alpha)$. Le lemme 4.2.3 implique que $\omega_k = d_S\alpha$. Ainsi $[\omega] = 0$, et l'injectivité de f^* est démontrée.

Surjectivité : Soit $[\gamma] \in H(\Gamma_0, C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{Z}))$, d'après le lemme 4.2.4 il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que il existe $\alpha \in C^n(\Gamma_k, \mathbb{Z})$, vérifiant $p_k(\alpha) = \gamma$. Par conséquent,

$$0 = d_{PV}\gamma = d_{PV}p_k(\alpha) = p_k(d_S\alpha).$$

Le Lemme 4.2.3 implique que $[\alpha] \in H^n(\Gamma_k, \mathbb{Z})$, d'où $\pi_k(\alpha) \in \varinjlim_l H^n(\Gamma_l, \mathbb{Z})$. Notons $\omega = \pi_k(\alpha)$, donc $\gamma = p_k(\alpha) = f(\omega)$. Ainsi l'application f^* est surjective. $\square$

4.3 Cohomologie $\mathcal{P}$ -équivariante et la cohomologie PV

Dans [21], il a été donné un isomorphisme explicite entre la cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante et la cohomologie de Čech (tous deux à coefficients dans $\mathbb{R}$). L'idée d'un tel isomorphisme provient de l'interprétation de Sadun de la cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante dans le contexte du complexe de Anderson-Putnam-Gähler. En combinant celui-ci avec l'isomorphisme précédent entre la cohomologie de Čech et la cohomologie PV, on obtient un isomorphisme explicite entre la cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante et la cohomologie PV. En outre, on démontre que cet isomorphisme est uniformément continu suivant les topologies appropriées. Celle-ci nous permet de définir une version faible de la cohomologie PV.

4.3.1 Fonctions fortement $\mathcal{P}$ -équivariantes sur la Δ -transversale

Nous commençons ce paragraphe par une interprétation des fonctions fortement $\mathcal{P}$ -équivariantes sur la Δ -transversale. Ensuite, nous expliciterons un isomorphisme entre la cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante et la cohomologie PV. Cet isomorphisme est la composition de deux isomorphismes, le premier entre la cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante et la cohomologie de Čech [17]. Le second entre la cohomologie de Čech et la cohomologie PV [7].

Notons $C_{r-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega^n \mathbb{R}^{d*})$, l'ensemble des fonctions fortement $\mathcal{P}$ -équivariantes de rang r . Rappelons que le pavage $\mathcal{P}$ induit une application canonique $\tilde{\rho}_k : \mathbb{R}^d \rightarrow \Gamma_k$ telle que $\tilde{\rho}_k(x) = \rho_k(\mathcal{P} - x)$ (l'application ρ_k a été définie au chapitre 1, remarque 1.4.9). Soit σ une n -cellule de Γ_k . Alors $\tilde{\rho}_k^{-1}(\sigma)$ est une famille de n -faces dans $\mathcal{P}$ ayant toutes le même k -voisinage, i.e. la même k^{eme} couronne.

On dit que k est plus grand que r , si le k -voisinage d'une n -face contient le r -amas centré en la puncture de la n -face.

DÉFINITION 4.3.1. *Soit k plus grand que r et ω une n -forme fortement $\mathcal{P}$ -équivariante de rang r . L'application $J_r^k : C_{r-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega^n \mathbb{R}^{d*}) \rightarrow C^n(\Gamma_k, \mathbb{R})$ est définie par*

$$J_r^k(\omega)(1_\sigma) = \int_{\tilde{\sigma}} \omega,$$

avec $\sigma \in S_k^n$ et $\tilde{\sigma}$ un choix quelconque de n -face dans $\tilde{\rho}_k^{-1}(\sigma)$ (en effet, on montre que l'intégrale ne dépend pas du choix de $\tilde{\sigma}$ à l'aide d'un changement de variable et le fait que ω est fortement $\mathcal{P}$ -équivariante).

Pour $\omega \in C_{r-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega^n \mathbb{R}^{d*})$, l'application $\psi_k : C_{r-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega^n \mathbb{R}^{d*}) \rightarrow C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$ est définie par

$$\psi_k(\omega) = p_k \circ J_r^k(\omega)$$

avec r le rang de ω et k plus grand que r .

Il faut noter que, comme c'est fait de manière équivariante, le choix dans la définition ne pose aucun problème et que le résultat reste indépendant de r et k , à condition qu'ils soient assez grand. En particulier, on peut passer à la limite de telle sorte que $\psi = f \circ J$

où l'application $J : C_{s-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega^n \mathbb{R}^{d*}) \rightarrow \varinjlim_k C^m(\Gamma_k, \mathbb{R})$ est induite par J_r^k . Il s'ensuit que l'application ψ définie sur l'ensemble dense $\{\mathcal{P} - p \mid p \in \mathcal{P}^{n,punc}\} \subset \Xi_\Delta^n$ est donnée

$$\psi(\omega)(\mathcal{P} - p) = \int_{\sigma_p} \omega$$

avec σ_p la n -cellule de $\mathcal{P}$ dont la puncture est en p .

LEMME 4.3.2. $\psi \circ d = d_{PV} \circ \psi$. En particulier ψ induit une application entre cohomologies.

Démonstration. D'après le théorème de Stokes, on a $J_r^k(d\omega)(1_\sigma) = \int_{\partial\tilde{\sigma}} \omega = J_r^k(\omega)(1_{\partial\sigma})$. De plus, $1_{\partial\sigma} = d_S 1_\sigma$, donc l'application J_r^k commute avec les différentielles d et d_S . D'après le Lemme 4.2.1, on déduit la commutativité de ψ avec les différentielle d et d_{PV} . Par conséquent, ψ induit une application en cohomologie. $\square$

THÉORÈME 4.3.3 ([6]). ψ induit un isomorphisme entre la cohomologie fortement $\mathcal{P}$ -équivariante et la cohomologie PV.

Démonstration. On a déjà vu que f induit un isomorphisme dans le Théorème 4.2.5. De plus, l'application J est un isomorphisme comme conséquence du théorème de De Rham montré dans [28]. $\square$

4.3.2 La cohomologie PV faible

Dans ce paragraphe, on veut donner un lien entre les fonctions faiblement $\mathcal{P}$ -équivariantes et les fonctions sur la Δ -transversale à valeurs dans $\mathbb{R}$. La cohomologie associée à ces fonctions s'appellera la **cohomologie PV faible**, qui est reliée à la cohomologie faiblement $\mathcal{P}$ -équivariante.

LEMME 4.3.4. ψ est une application uniformément continue, par rapport à la topologie de Fréchet sur $C_{s-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega^n \mathbb{R}^{d*})$ et à la topologie de la convergence uniforme sur $C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit ω une n -forme fortement $\mathcal{P}$ -équivariante.

$$\begin{aligned} \|\psi(\omega)\|_\infty &= \sup_{p \in \mathcal{P}^{n,punc}} \left| \int_{\sigma_p} \omega \right| \\ &\leq \max_{p \in \mathcal{P}^{n,punc}} \text{vol}(\sigma_p) \|\omega\|_\infty \end{aligned}$$

la complexité locale finie garantie l'existence d'une valeur maximale ne dépendant pas de ω . Donc ψ est une application uniformément continue. $\square$

COROLLAIRE 4.3.5. *L'application ψ se prolonge à une fonction continue $\tilde{\psi} : C_{w-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega^n \mathbb{R}^{d*}) \rightarrow C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{R})$.*

Démonstration. Puisque ψ est une fonction uniformément continue, alors elle se prolonge à une application continue entre la fermeture topologique de deux espaces vectoriels. L'adhérence de $C_{s-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega^n \mathbb{R}^{d*})$, dans $C_b^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega^n \mathbb{R}^{d*})$ (suivant la topologie de Fréchet défini à l'égalité 1.2.2 du chapitre 1 par la famille de semi-normes $(s_l)_{l \in \mathbb{N}}$), est $C_{w-\mathcal{P}}^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega^n \mathbb{R}^{d*})$ (définie dans [17]). La fermeture de $C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$ est $C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{R})$, car Ξ_Δ^n est un ensemble totalement disconnecté.

La définition de la différentielle PV reste valable sur $C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{R})$. Nous pouvons envisager également le complexe, dit le complexe PV faible :

$$\cdots C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{R}) \xrightarrow{d_{PV}} C(\Xi_\Delta^{n+1}, \mathbb{R}) \rightarrow \cdots$$

DÉFINITION 4.3.6. *La cohomologie PV faible est la cohomologie du complexe précédent, qu'on note $H(\Gamma_0, C(\Xi_\Delta, \mathbb{R}))$.*

On remarque que le complexe PV faible est un complexe plus large (en terme d'inclusion) que le complexe $\cdots C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{d_{PV}} C(\Xi_\Delta^{n+1}, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R} \rightarrow \cdots$. De plus, l'inclusion $C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R} \subset C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{R})$ est une application chaîne, cependant, il n'est pas du tout évident qu'il existe une relation simple entre $H_{PV}(\Gamma_0, C(\Xi_\Delta, \mathbb{R}))$ et $H_{PV}(\Gamma_0, C(\Xi_\Delta, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}) \cong H_{PV}(\Gamma_0, C(\Xi_\Delta, \mathbb{Z})) \otimes \mathbb{R}$.

LEMME 4.3.7. *L'application $d_{PV} : C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{R}) \rightarrow C(\Xi_\Delta^{n+1}, \mathbb{R})$ est continue (pour tout $n \in \{1, \dots, d\}$).*

Démonstration. Soit $f, g \in C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{R})$, alors on obtient

$$\|d_{PV}(f) - d_{PV}(g)\|_\infty = \left\| \sum_{\tau \in \mathcal{S}_0^{n+1}} o_{\sigma\tau} \theta_{\sigma\tau}(f - g) \right\|_\infty,$$

or les applications $\theta_{\sigma\tau}$ sont des isométries partielles, par conséquent, $\|\theta_{\sigma\tau}(f - g)\|_\infty = \|f - g\|_\infty$.

Donc

$$\begin{aligned}
\|d_{PV}(f) - d_{PV}(g)\|_\infty &\leq \sum_{\tau \in \mathcal{S}_0^{n+1}} \|o_{\sigma\tau} \theta_{\sigma\tau}(f - g)\|_\infty \\
&\leq \sum_{\tau \in \mathcal{S}_0^{n+1}} \|f - g\|_\infty \leq C \|f - g\|_\infty
\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

avec $C = \#(\mathcal{S}_0^{n+1})$. On en déduit que d_{PV} est une application continue. $\square$

COROLLAIRE 4.3.8. *L'application $\tilde{\psi}$ induit un homomorphisme $\tilde{\psi}^*$ sur la cohomologie faiblement $\mathcal{P}$ -équivariante $H_{w-P}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ à valeurs dans la cohomologie PV faible $H(\Gamma_0, C(\Xi_\Delta^*, \mathbb{R}))$.*

Démonstration. C'est un corollaire du lemme précédent et du lemme 4.3.2 prolongé à $\tilde{\psi}$. Donc l'application $\tilde{\psi}$ est une application chaîne. $\square$

Dans l'article [6], dont le chapitre présent était la traduction d'une grande partie, on se pose la question, quand est-ce que cette application est bijective? La réponse pour le degré 0 est affirmative, i.e. l'application $\tilde{\psi}$ est bijective, car les deux groupes sont égaux à $\mathbb{R}$ au degré 0. On démontre alors dans [6] que l'application $\tilde{\psi}$ est bijective pour le degré 1.

Bibliographie

- [1] Anderson J.E., Putnam I.F. : *Topological invariants for substitution tilings and their associated C^* -algebras*. Ergod. Th. & Dynam. Sys. **18**, 509-537(1998).
- [2] Bourbaki N. *Éléments de Mathématiques : Topologie générale* Springer(2007). Edition originale publiée en 1971.
Une partie du livre est disponible aussi sur Google Books.
- [3] Bellissard J., Benedetti R., Gambaudo J.-M. *Spaces of tilings, finite telescopic approximations and gap-labelling*. Comm. Math. Phys. vol. **261**, no. 1, 1-41(2006).
- [4] Berthé V., Ferenczi S., Mauduit C., Siegel A. *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*.
- [5] Bony J.-M. *Cours d'Analyse : Théorie des distributions et analyse de Fourier*. Les éditions de l'école polytechnique(2001).
- [6] Boulmezaoud H., Kellendonk J. *Comparing different versions of tiling cohomology* Soumis. Disponible sur arXiv :0906.4308v1 [math.DS]
- [7] Bellissard J., Savinien J. : *A spectral sequence for the K -theory of tiling spaces* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **29**, 997-1031 (2009).
- [8] Baake M., Schlottmann M., Jarvis P.D. *Quasiperiodic tilings with tenfold symmetry and equivalence with respect to local derivability*. J.Phys. A :Math.Gen.**24**, 4637-4654(1991).
- [9] Baake M., Kramer P. Schlottmann M., Zeidler D. *Planar patterns with fivefold symmetry as sections of periodic structures in 4-space*. Internat. J. Modern Phys. B 4 no **15-16** 2217-2268 (1990).
- [10] Bott R., Tu L.W. : *Differential forms in Algebraic Topology*, New York : Springer 1982.
- [11] Clark A., Sadun L. : *When Shape Matters : Deformations of Tiling spaces*. Ergodic. Th. & Dyn. Systems **26**, 69-86(2006).
- [12] Dieudonné J. : *Éléments d'analyse tome 9*, Gauthier-Villards 1982.

-
- [13] Forrest A.H., Hunton J.R., Kellendonk J. : *Cohomology of Canonical Projection Tilings*. Commun. Math.Phys **226**, 289-322(2002)
 - [14] Gähler F. : *Talk given at the conference : "Aperiodic Order, Dynamical Systems, Operator Algebras and Topology"*(2002).
Slides available at : www.pims.math.ca/science/2002/adot/lectnotes/Gaehler/
 - [15] Grünbaum B., G.C. Shephard *Tilings and Patterns*. New York : Freeman 1987
 - [16] Hatcher A. : *Algebraic Topology*. Cambridge University Press(2002).
The electronic version of the book is currently available at :
[http ://www.math.cornell.edu/hatcher/AT/ATpage.html](http://www.math.cornell.edu/hatcher/AT/ATpage.html)
 - [17] Kellendonk J., Putnam I.F. : *The Ruelle-Sullivan map for actions of $\mathbb{R}^n$* . Math.Ann. **334**, 663-711(2006).
 - [18] Kellendonk J. : *Integer groups of covariants*. Commun. Math. Phys.(1997).
 - [19] Kellendonk J. : *Integer groups of covariants associated to Octagonal tilings*. Fields Institute Communications Vol. **13**(1997).
 - [20] Kellendonk J. : *Pattern-equivariant Functions and Cohomology*. J.Phys. A :Math.Gen. **36**, 5765-5772(2003).
 - [21] Kellendonk J. : *Pattern Equivariant Functions, Deformations and Equivalence of Tiling Spaces*. Ergodic Theory Dynam. Systems. **28**(2008), no. 4, 1153-1176
 - [22] Lang S. : *Algebra(Revisited Third Edition)*. Springer Verlag(2002).
 - [23] Moody R.V. *Meyer Sets and Their Duals*. In *The Mathematics of Aperiodic Order*, Proceedings of the NATO-Advanced Study Institute on Long-range Aperiodic Order, NATO ASI Series C **489**, Kluwer Acad. Press, 403-441(1997).
 - [24] Moore C.C., Schochet C. *Global Analysis on Foliated Spaces*. Mathematical Sciences Research Institute Publications vol **9**, Springer Verlag, New York(1988).
 - [25] Pham F. : *Intégrales singulières* EDP Sciences, les Ulis ; CNRS Edition, Paris 2005.
Also available at the Google books.
 - [26] Sadun L. : *Tilings Spaces are Inverse Limits*. J. of Math. Phys. **44**, 5410-5414(2003).
 - [27] Sadun L. *Tilings, tilings spaces and topology*. Philosophical Magazine **86**, 875-881(2006) .
 - [28] Sadun L. : *Pattern-Equivariant Cohomology with Integer Coefficients*. Ergodic Theory and Dynamical Systems **27**, 1991-1998(2007).
 - [29] Sadun L., Williams R.F. : *Tiling spaces are Cantor set fiber bundles*. Ergodic Theory Dynam. Systems **23**, 307-316(2003).
-

-
- [30] Sato H. *Algebraic topology : an intuitive approach*. Translations of Mathematical Monographs 183. Iwanami Series in Modern Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI (1999)
- [31] Senechal M. : *Quasicrystals and geometry*. Commun.Math.Phys.(1997).
- [32] Schlottmann M. *Generalized Model Sets and Dynamical Systems*. CRM Monogr. Ser. **13**, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 143-159 2000.
- [33] Socholar J. E. S. : *Simple octagonal and dodecagonal quasicrystals*. Phys. Rev. B,**39(15)**. 10519-10551 (1989).
- [34] Sources Internet : *Tilings Encyclopedia*. <http://tilings.math.uni-bielefeld.de/>
-